# EUCLIDES

vakblad voor de wiskundeleraar

oktober 10

nr 2

jaargang 86


Centrale examens 2010

Examenbesprekingen en Examenforum

'Over' de examens

Op weg naar IMO2011

Vernieuwde oude doos

Jaarvergadering/ Studiedag 2010: Geboeid door wiskunde

Ludolph van Ceulen (1540-1610)



Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

# COLOFON

september
10
nr 2
jaargang 86

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

## Redactie



## Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de hoofdredacteur: Klaske Blom,
Westerdoksdijk 39, 1013 AD Amsterdam
E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

## Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvvw.nl/euclricht.html

## Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Veenendaal, www.dekleuver.nl

## Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

### Voorzitter

Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 70 04
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

### Secretaris

Kees Lagerwaard,
Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46
E-mail: secretaris@nvvw.nl

### Ledenadministratie

Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
Tel. (0321) 31 25 43
E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

### Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Postbus 405, 4100 AK Culemborg
Tel. (0345) 531 324

### Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 70,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 40,00
- studentleden: € 35,00
- gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 40,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

### Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Personen (niet-leden van de NVVW): € 65,00
Instituten en scholen: € 145,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 18,00
Betaling per acceptgiro.

### Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
t.a.v. Sepideh Moosavi
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal
Tel. (0318) 555 075
E-mail: s.moosavi@dekleuver.nl

# Kort vooraf

[ Klaske Blom ]

### Nieuw schooljaar, nieuwe jaargang

We zijn allemaal weer begonnen en hebben het nieuwe schooljaar ingeluid. Ik hoop dat u uitgerust en met goede energie het jaar gestart bent en dat de vermoeidheid van de eerste paar dagen weggetrokken is. Het valt mij altijd zo rauw op mijn dak, die eerste week. Daarna zit ik er weer in, lukt het om gewoon – in plaats van mopperend – de wekker aan te horen, en haalt mijn tong mijn schoenen niet meer aan het eind van de dag.
Voor u ligt traditiegetrouw het examennummer van *Euclides* met een uitgebreide terugblik op de landelijke examens. Hierover later meer. Ook zien we de studiedag van de NVvW op 6 november in het verschiet liggen. Op de Verenigingspagina's vindt u uitgebreide informatie over het thema van de dag, over de agenda van de jaarvergadering, over de manier waarop u zich kunt aanmelden en nog meer.

### Terugblik op de examens

Rond de examens doen zich elk jaar weer vreemde verschijnselen voor; soms vertederend, zoals de hoeveelheden snoep en mascottes die meegebracht worden. Andere zaken vind ik ronduit verontrustend: wat te denken van leerlingen die na hun examen onmiddellijk thuis hun gemaakte werk 'nakijken' met de digitale correctievoorschriften. Na – in hun ogen – twee slecht gemaakte examens, laten ze de moed zakken, want het kan toch niet meer gaan lukken… Dat is desastreuzer dan bij die leerlingen die zichzelf mateloos overschatten tijdens hun correctie; voor hen komt de klap later, dat dan weer wel. En wat ik ook wonderlijk vind, is de gedachte, die gemeengoed lijkt te worden, dat het LAKS invloed heeft op de N-termen. Hoe meer gebeld, hoe meer klachten, hoe groter de invloed op het CvE. Dus… ? Massaal bellen. Een vreemd idee over democratie en examens. Over die N-termen heeft Sieb Kemme trouwens al eens geschreven, en in dit nummer blijken in ieder geval twee auteurs met hem te sympathiseren en van mening te zijn dat 'dit gedrocht beter kan worden afgeschaft'. Tijdens de regionale besprekingen is veel gediscussieerd over de mores van de examens en natuurlijk veel over de correctievoorschriften. Dit jaar heeft Erik Korthof namens de vereniging een verslag geschreven naar aanleiding van al deze besprekingen en de enquêtes die er werden afgenomen.

### Over de examens

Er zijn nu ongeveer vier maanden verlopen, en toch duiken we er weer even midden in. Het is goed om te evalueren en op grond daarvan te besluiten of het nodig is om het programma voor komend schooljaar bij te stellen. Wat gaan al die collega's doen die met hun vwo wiskunde A-leerlingen fors hadden ingezet op algebraïsche vaardigheden? Hoe gaat die interne strijd tussen geweten en externe normen uitpakken? Eén nieuw examen geeft wel een hint over de koers in de komende jaren, maar een trend valt nog niet te zien. De collega's die geschreven hebben over het wiskunde A-examen op het vwo, waren teleurgesteld over het niveau en hebben het gevoel dat hun leerlingen achteraf gelijk hadden met hun argwaan: 'Moeten we dat écht allemaal kunnen?' Interessant is wat dit betekent voor de toekomst. De lat hoog leggen lijkt me altijd goed, maar te hoog? Leest u de bijdragen van Mieke Thijsseling en Harmen Westerveld. En die van Ineke van Pol over haar kleine groep wiskunde C-leerlingen. Ook het vwo wiskunde B-examen was een eerste 'nieuw' examen. Heiner Wind klom in de pen om over zijn ervaringen te schrijven.
Na het gemopper vorig jaar op het havo wiskunde B-examen werd dit jaar met spanning uitgekeken naar het examen 2010. Weer een moeilijk examen waarover veel gezegd en geschreven is. Hielke Peereboom overziet het 'slagveld'. Ik ben blij dat de Cito-medewerkers wederom een uitvoerig evaluerend verslag hebben geschreven over alle examens. U kunt uw eigen resultaten vergelijken met de landelijke, voor zover u dat niet al gedaan had. U kunt uit de kwantitatieve en ook kwalitatieve analyses uw eigen conclusies trekken voor de aanpak van uw examenklas dit jaar. U kunt lezen waar een examenvraag anders uitwerkte dan bedoeld, en ook hier: nog veel meer. Ik beveel u dit mooie en inzichtelijke artikel van harte aan.

### Meer interessants om te lezen (en om over te schrijven?)

Ik hoop dat u het komend schooljaar met plezier en voldoening zult werken, dat u voldoende tijd overhoudt om te lezen, en mocht u dan nog tijd en zin hebben om over uw ervaringen te schrijven, dan houden wij als redactie ons bijzonder aanbevolen voor uw bijdragen voor *Euclides*.
Ik wens u een goed nieuw schooljaar toe!

# Inhoud

# Examens wiskunde 2010, 1e tijdvak

## VMBO KB EN GL/TL, HAVO A EN B, VWO A, B EN C

[ Ger Limpens, Paul van der Molen, Jos Remijn, Melanie Steentjes en Ruud Stolwijk ]

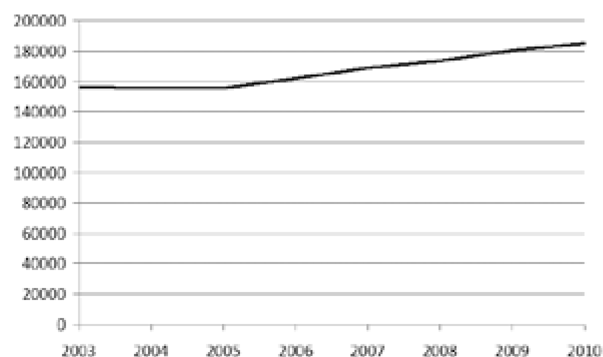
**Woord vooraf**
**[Ger Limpens]**
Zoals al uit de titel boven dit verhaal valt op te maken, wordt er ook dit jaar in dit overzichtsartikel geen aandacht gegeven aan de examens wiskunde BB. In de meegeleverde tabellen geven we slechts wat summiere informatie over deze examens. In een volgend *Euclides*-nummer hopen we, net als de afgelopen jaren, alsnog iets inhoudelijks over deze examens te kunnen melden. Een en ander heeft te maken met het feit dat de BB-examens grotendeels op digitale wijze worden afgenomen en de digitale examens een ander publicatiebeleid kennen dan de 'traditionele' papieren examens. Wij als examenmakers kunnen begrip opbrengen voor de kritiek uit het veld dat de acceptatie van verdere digitalisering van examens niet bevorderd wordt door een al te gesloten houding in dat publicatiebeleid. Het is echter niet aan ons, examenmakers van Cito, een verandering in dat beleid te verordonneren.

***In tabel 1*** [Leerlingenaantallen 2010] – de tabellen staan ***op pag. 16 en 17*** – valt af te lezen dat de digitaliseringsslag in BB op dit moment nagenoeg 'gestreden' is. Hoewel de gegevens in deze tabel niet een exacte weergave van de diverse aantallen kandidaten weergeven (de tabel is onder andere gebaseerd op de bestelde hoeveelheden examens en het is bekend dat scholen daarbij zekerheidshalve altijd een zekere overmaat hanteren), is de veronderstelling gerechtvaardigd dat in 2010 circa 95% van de BB-kandidaten op digitale wijze examen gedaan heeft. Bij KG was er dit jaar voor het eerst een pilot met digitale examens. Circa 15% van die kandidaten werd via de computer geëxamineerd. In een volgend *Euclides*-nummer zullen we meer over deze pilot vertellen.
Kijkend naar de totalen binnen de diverse onderwijstypes is het wellicht interessant om na te gaan of er zich de laatste jaren een herkenbare ontwikkeling voordoet. Daartoe zijn ***in figuur T1*** de jaarlijkse totalen vanaf 2003 weergegeven van de kandidaten die een examen wiskunde deden. Vanaf 2005 loopt dit jaarlijkse aantal gestaag omhoog. En verder is het zeker leerzaam om een blik te werpen (***zie figuur T2***) op de jaarlijkse onderlinge verhouding binnen de aantallen kandidaten wiskunde op die verschillende niveaus. Daar valt af te lezen dat het relatieve aantal kandidaten vmbo al die jaren daalt. En vanaf 2008 zien we dat het havo af gaat wijken van het vwo: vwo blijft nagenoeg gelijk daar waar havo groeit. Of een en ander een indicatie is van de collectieve inspanning om Nederland zich als kennisland te laten manifesteren?

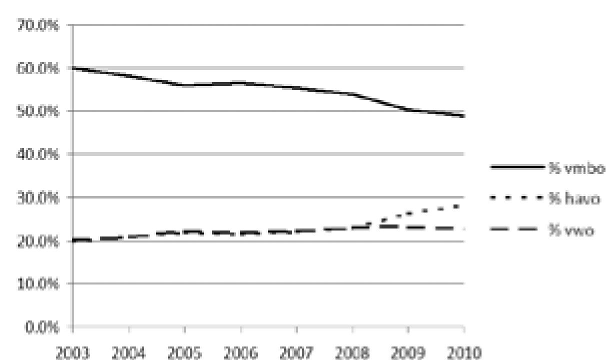
***In tabel 2*** [Verzamelde N-termen] staan de verschillende N-termen plus bijbehorende onvoldoendepercentages en gemiddeldes verzameld. Veel van deze informatie wordt ook vermeld in de bijdragen per niveau/vak. In deze bijdragen vindt u tevens veel informatie op itemniveau waarbij ook het begrip p'-waarde regelmatig terugkeert. De p'-waarde is de gemiddelde waargenomen score uitgedrukt als percentage van de maximale score.
De onderstaande bijdragen per wiskundeniveau/vak [1] zijn tot stand gekomen op basis van de gegevens zoals die door talloze collega's zijn aangeleverd via WOLF. Dit jaar is voor het eerst bij het maken van de analyses gebruik gemaakt van alle door docenten verstrekte leerlingenresultaten: voorheen was de analyse die door Cito gemaakt werd, steevast gebaseerd op de resultaten van de eerste vijf kandidaten uit de alfabetisch gerangschikte school- of docentgegevens. Bij een aantal vakken heeft dat geresulteerd in een enorme toename van de steekproefomvang. Of dat een gevolg heeft voor de kwaliteit van de analyses en zo ja welk, is op moment van schrijven nog niet geheel en al helder. Uiteraard is het wel zaak al die collega's dank te zeggen voor het verstrekken van die resultaten: zonder deze gegevens is het niet mogelijk een helder beeld te krijgen van de wijze waarop de examens gemaakt zijn. Natuurlijk maken we verder ook gebruik van de informatie die ons bereikt via de centrale en regionale besprekingen die ook dit jaar weer onder de auspiciën van de NVvW werden georganiseerd. Ook daarvoor onze hartelijke dank.
Toch ook dit jaar weer een opmerking over een zekere angst die ons examenmakers bezighoudt: de aantallen bezoekers van deze vergaderingen zijn zo klein dat we zeker niet het idee hebben dat deze bijeenkomsten recht doen aan de diversiteit van standpunten die docenten er over de examens op na zullen houden. We hopen, wellicht tegen beter weten in, dat de dalende tendens die hier te constateren valt, toch gekeerd kan worden. Een alternatieve wijze om te beluisteren wat er in den lande over de examens door collega's wordt opgemerkt, vormt het meelezen op de diverse fora van de vereniging. Dit jaar was de toegang hiertoe voor het eerst beperkt tot geregistreerde NVvW-leden en dat was verheugend te noemen. Toch geeft een forum een ander soort informatie voor ons als examenmakers dan een bespreking. Bij een forum zie je dat docenten zich al heel snel op detailniveau bezighouden met het uitpluizen van diverse interpretaties/beoordelingsmogelijkheden van bijna individuele leerlingenantwoorden, terwijl een bespreking veeleer de gelegenheid biedt met een helikopterblik een uitspraak over een examen te doen. En dat laatste is voor ons van groter belang, zo mag duidelijk zijn.
Tot slot willen wij, Cito-toetsdeskundigen wiskunde, ook van de gelegenheid gebruik maken om nog eens te benadrukken dat het maken van examens niet een activiteit is die we in een ivoren toren uitvoeren. Het maken van examens kan alleen maar plaatsvinden dankzij een grote verzameling mensen uit het onderwijsveld die zich betrokken voelen. Daarbij denken we aan de docentleden van de diverse constructiegroepen en de leden van de verschillende CvE-vaksecties [2]. Ook *screeners* willen we niet onvermeld laten evenmin als de vele docenten die zich bereid getoond hebben op de een of andere wijze proefmateriaal uit te testen en te evalueren bij hun leerlingen. Ook naar al deze mensen gaat onze dank uit.

**VMBO KB-GL/TL**
**[Melanie Steentjes]**
Ook dit jaar was er, net als vorig jaar, alleen een centrale examenbespreking van de vmbo-examens kaderberoeps (KB) en gemengde leerweg/theoretische leerweg (GL/TL). Het examen werd op de vrijdag voor het pinksterweekend afgenomen, waardoor regionale examenbesprekingen niet zinvol werden geacht. Ook werd er dit jaar minder op het forum geschreven dan vorig jaar. Waarschijnlijk had het ermee te maken dat je, zoals hierboven al gemeld, dit jaar lid moest zijn van de vereniging om de reacties op het forum te kunnen plaatsen en lezen.
Dit alles betekent dat we minder informatie hebben gekregen via deze kanalen. Maar de teneur was wel dat docenten zowel het KB- als het GL/TL-examen aan de makkelijke kant vonden. Vooral het KB-examen werd een stuk eenvoudiger gevonden dan voorgaande jaren. Dat lag volgens docenten enerzijds aan het wiskundig niveau dat eenvoudiger was. Anderzijds vonden sommige docenten de contexten en het taalgebruik beter afgestemd op de KB-leerling waardoor het examen in zijn geheel ook iets beter gemaakt werd. Het verschil tussen beide examens vond men in orde.
Iets nieuws was dit jaar de 'quick scan' bij het GL/TL-examen: docenten die de resultaten van hun leerlingen via WOLF hadden ingevoerd, kregen een korte vragenlijst van vier vragen voorgelegd. De 1322 docenten die deze vragenlijst hebben ingevuld, waren opvallend positief over het GL/TL-examen: ze gaven een gemiddeld cijfer van 6,85 voor dit examen. 66% van de docenten vond het examen niet te makkelijk en niet te moeilijk en 20% van de docenten vond het examen te makkelijk. Over de lengte van het examen was 92% tevreden en 90% vond de inhoudelijke aansluiting van het examen bij het gegeven onderwijs voldoende tot zeer goed.
In het vervolg van dit stuk bekijken we beide examens nader en ook de overlap tussen beide examens.

**GL / TL**
Het GL/TL-examen wiskunde bestond uit 24 vragen waarvoor in totaal 76 punten gehaald konden worden. Van de 35033 leerlingen van wie we de gegevens hebben, waren er 10 leerlingen die alle 76 punten gescoord hebben. Helaas waren er ook 2 leerlingen die maar 1 punt behaald hebben. ***In tabel 3*** [VMBO GL/TL 2010] is een overzicht van de p'-waarden per vraag te vinden.




figuur T1 Totaal kandidaten




figuur T2 Kandidaten in procenten van het totaal

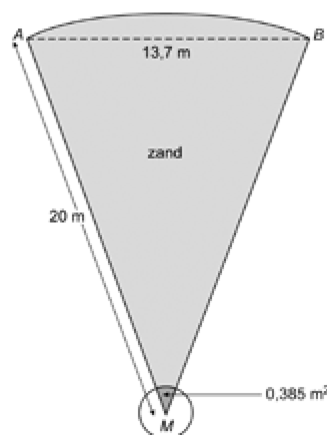
Het examen startte met de context *Stappenteller*. Met een gemiddelde p'-waarde van 55,0 was dit op *Kogelstootbaan* na de slechtst scorende context van het examen. De examenmakers streven ernaar om het examen met een eenvoudige context te beginnen. Vanwege de lay-out moet de eerste context uit één pagina bestaan. We hadden voor de startcontext dus ook *Konijneneiland* of *Gevelvlag* kunnen kiezen. Gezien de gemiddelde p'-waarden van deze contexten zou elk van beide een betere keus zijn geweest. Maar het leek ons voor leerlingen niet prettig het examen te beginnen met exponentiële groei (*Konijneneiland*) of goniometrie (*Gevelvlag*). Gelukkig was de eerste vraag van *Stappenteller* goed te doen met een p'-waarde van 83. Over de tweede vraag is op het forum veel te doen geweest. Om de vraag te beantwoorden, moesten leerlingen het gemiddelde wandeltempo van een persoon schatten. Er zijn leerlingen die uitgegaan zijn van de (foutieve) veronderstelling dat iemand 1 stap per seconde zet. Met deze aanname werd de vraag een stuk eenvoudiger. Veel docenten vonden het lastig om uit het correctievoorschrift op te maken hoeveel punten ze konden geven voor een dergelijke oplossing. Op de examenbespreking is deze vraag ook besproken en er is aldaar besloten om hier maximaal 1 punt voor te geven. Opvallend is de lage score (p'-waarde van 27) bij vraag 3, waarbij leerlingen een woordformule moesten geven van een lineair verband. 57% van de leerlingen scoorde hier geen enkel punt. Bij vraag 5 moest gerekend worden met een groeifactor. Dat ging verrassend goed met een p'-waarde van 51. Bij de context *Van Betancuria naar Antigua* (overlap met het KB-examen) moesten leerlingen aan de hand van een hoogtelijnenkaartje tekenen, meten en rekenen. Dit is ze in het algemeen goed afgegaan. Discussie was er op het forum over vraag 7.

Daar moest het gedeelte van de wandelweg gekleurd worden waar het hoogste punt van de wandeling kon liggen. Veel leerlingen hebben maar een deel van de wandelweg tussen de twee hoogtelijnen van 500 meter gekleurd, wellicht omdat ze ervan uitgegaan zijn dat het hoogste punt nooit direct naast de hoogtelijn van 500 meter kan liggen. In de examenbespreking is besloten om hiervoor 1 punt af te trekken. Uit de resultaten blijkt dat deze vraag niet goed discrimineert: leerlingen met een hoge score op het hele examen scoorden niet echt beter op deze vraag dan leerlingen met een lage score op het hele examen. Uiteindelijk een minder geschikte vraag dus. Een vraag die daarentegen volgens de gegevens wel goed onderscheid maakte tussen de vaardige en minder vaardige leerlingen was vraag 10 waarbij een hellingshoek moest worden berekend met behulp van de tangens.
De GL/TL-leerlingen scoorden hier een p'-waarde van 52 op, een stuk beter dan de KB-leerlingen met een p'-waarde van 27.
*Magnetic* was met een gemiddelde p'-waarde van 83,4 de best gemaakte context van het GL/TL-examen. Vooral op vraag 12 werd goed gescoord. 85% van de leerlingen haalde hier alle punten. Op het forum werd gemopperd dat er volgens het correctievoorschrift geen punten mochten worden afgetrokken als er een vloeiende lijn door de punten was getekend. Dit was volgens een aantal docenten juist iets wat je van GL/TL-leerlingen mag vragen. De examenmakers wilden met deze vraag vooral toetsen of leerlingen de formule konden omzetten in een grafiek. Het discreet of continu zijn van de variabelen werd bewust buiten beschouwing gelaten. Gezien de behaalde p'-waarde van 95 hebben de criticasters gelijk en hadden er wel wat meer eisen gesteld mogen worden.
*Kogelstootbaan* had geen overlap met het KB-examen. Dit was ook de laagst scorende context met een p'-waarde van 38,2. Maar uit gegevens blijkt dat alledrie de vragen een heel goed onderscheid maakten tussen minder vaardige en vaardige leerlingen. Kortom: een prima context voor een GL/TL-examen vanuit ons perspectief. Op vraag 16 (***zie figuur 1***) is een erratum gekomen omdat pas in vraag 17 staat dat *AB* een cirkelboog is (en dus geldt dat *MA* = *MB*). Maar ook voor de berekening van het antwoord op vraag 16 had je dit gegeven nodig. Je moest namelijk weten dat driehoek *MAB* een gelijkbenige driehoek is om met de sinus de halve hoek *M* uit te kunnen rekenen. Opvallend is de lage p'-waarde (36) in vergelijking met de twee andere vragen uit het examen waarin goniometrie getoetst werd (vraag 10 en 23 met p'-waarden van respectievelijk 52 en 56). Het verschil lijkt hem erin te zitten dat in de figuur bij vraag 16 niet direct een rechthoekige driehoek te herkennen was, in tegenstelling tot de driehoeken bij vraag 10 en 23. Hierdoor leken leerlingen niet te weten hoe ze vraag 16 moesten aanpakken: 57% van de leerlingen scoorde geen enkel punt. Van de leerlingen die echter wel een idee hebben gehad hoe dit aangepakt moest worden, haalde het grootste gedeelte ook alle vijf punten. Bij vraag 17 moest de oppervlakte van een deel van een cirkelsector worden berekend. Met een p'-waarde van 24 was dit de slechtst gemaakte vraag van het examen.
Dat leerlingen weinig moeite hebben met vragen over exponentiële groei blijkt wel uit de resultaten bij de context *Konijneneiland*. De meeste moeite hebben leerlingen nog gehad met de laatste vraag waarin gevraagd werd om de grenswaarde te berekenen.
Het examen sloot af met de context *Gevelvlag*, een context die ook in het KB-examen zat. In deze context moesten leerlingen rekenen met de stelling van Pythagoras, tangens en oppervlakte. Niet eenvoudig, maar met een gemiddelde p'-waarde van 66,9 ging het leerlingen goed af. Sommige leerlingen rekenden met schaal, maar omdat er duidelijk was aangegeven dat het om schetsen ging (de hoeken klopten ook niet helemaal) kon dat niet goed gerekend worden. Alle drie de vragen van deze context maakten, net als de vragen van *Kogelstootbaan*, een goed onderscheid tussen vaardige en minder vaardige leerlingen. Opvallend, maar niet onverwacht, is ook het grote verschil in p'-waarden tussen GL/TL-leerlingen en KB-leerlingen bij deze context.
Het CvE besloot de N-term voor dit examen vast te stellen op 0,4. Dat resulteerde in een examen met 33,8% onvoldoendes en een gemiddeld cijfer van 6,0.

**KB**

Het KB-examen wiskunde bestond uit 25 vragen waar in totaal 73 punten voor gehaald konden worden. Van de 16 577 leerlingen waar we de gegevens van hebben, waren er 6 leerlingen die alle 73 punten gescoord hebben. Er was 1 leerling die

De kogelstootbaan wordt aangelegd met de afmetingen die in onderstaande figuur staan.




**16** Laat met een berekening zien dat hoek *M* in driehoek *MBA* inderdaad 40° is.

figuur 1 Uit: VMBO-GL/TL 2010 (Kogelstootbaan)

Op zondag 12 december 2004 werd in Eindhoven het grootste pitabrood ter wereld gebakken.





1 Voor het bakken werd een ronde bakplaat met een diameter van 6 meter gebruikt.
→ Laat met een berekening zien dat de oppervlakte van de bakplaat afgerond 28,3 $m^2$ is.

figuur 2a Uit: VMBO-KB 2010 (Pitabrood)

1 **maximumscore 2**

- De straal is (6 : 2 =) 3 (m) 1
- Oppervlakte is $\pi \times 3^2 = 28{,}27$...(, dus afgerond 28,3 ($m^2$)) 1

figuur 2b Uit: Correctievoorschrift VMBO-KB 2010 (Pitabrood)

maar 1 punt behaald heeft. ***In tabel 4*** [VMBO KB 2010] is een overzicht van de p'-waarden per vraag te vinden.
De startcontext *Pitabrood* was prettig. Met een gemiddelde p'-waarde van 64,2 was het niet de best gemaakte context van het examen, maar gezien de lay-out waren de contexten *Gevelvlag* en *Onweer* de alternatieve startopgaven en die scoorden beide minder goed. Vraag 1 is een zogenaamde 'laat-zien'-vraag: een vraag waarin het antwoord al gegeven is. Het antwoord is bij deze vraag al gegeven omdat met het antwoord verder gerekend moet worden in vraag 4. Uit het veld kwam de opmerking dat 'laat-zien'-vragen voor KB-leerlingen erg lastig zijn. Bij vraag 1 moesten leerlingen laten zien dat de oppervlakte van de bakplaat waarop het pitabrood gebakken werd, afgerond 28,3 $m^2$ was; ***zie figuur 2a***. Gezien het correctievoorschrift (***zie figuur 2b***) kon het tweede punt alleen gegeven worden als een leerling liet zien dat uit de berekening 28,27 komt (of een antwoord met nog meer decimalen). Daarvoor is gekozen omdat een leerling anders zou kunnen bluffen (zonder het uit te rekenen) dat uit zijn berekening 28,3 komt. Maar sommige docenten gaven aan dat hun leerlingen, omdat ze afronden lastig vinden, bij een dergelijke vraag hun rekenmachine van tevoren instellen op één decimaal en dus direct die 28,3 vinden. Een andere methode aanleren bij dit soort vragen zou te abstract zijn voor een KB-leerling.
Bij vraag 4 van *Pitabrood* moest verder gerekend worden met deze 28,3 $m^2$ om het totaal aantal kg beleg te berekenen dat gebruikt werd. In deze vraag moest omgerekend worden van $m^2$ naar $cm^2$ en vervolgens van gram naar kg. Dat leerlingen dit lastig vinden, blijkt wel uit de p'-waarde van 36. Maar 7% van de leerlingen wist bij deze vraag alle vier de punten te halen.
De formule waarmee gerekend moest worden in *Queteletindex* was waarschijnlijk herkenbaar voor veel leerlingen. Deze context ging erg goed met een gemiddelde p'-waarde van 78,6. In vraag 6 moest worden teruggerekend om het streefgewicht te kunnen berekenen, maar ook daar hadden leerlingen weinig moeite mee (p'-waarde van 71). In vraag 7 moest het gedeelte aangegeven worden in de grafiek dat hoort bij een normaal gewicht. Deze vraag werd behoorlijk goed gemaakt (p'-waarde van 69), maar discrimineerde niet echt goed: leerlingen met een hoge score op het hele examen scoorden niet echt beter op deze vraag dan leerlingen met een lage score op het hele examen. Wellicht heeft een aantal leerlingen goed gegokt bij het inkleuren van het bedoelde gedeelte.
De context *Van Betancuria naar Antigua* was een context die ook in het GL/TL-examen stond. De KB-leerlingen scoorden een stuk minder goed dan de GL/TL-leerlingen. Het verschil was het grootst bij vraag 13 waarin de hellingshoek moest worden berekend met behulp van de tangens. Deze vraag had bij het KB-examen een p'-waarde van 27, terwijl de GL/TL-leerlingen er een p'-waarde van 52 op scoorden.
De context *Magnetic* verschilde licht van de overeenkomstige context in het GL/TL-examen. In het KB-examen waren de haakjes uitgewerkt in de formule voor het totaal aantal staafjes, waardoor de formule een stuk eenvoudiger werd. Ondanks deze vereenvoudiging bleef er echter een behoorlijk verschil tussen de p'-waarden van de vragen bij het KB-examen en het GL/TL-examen. Ook vraag 17 waarin een vooraanzicht moest worden getekend, is bij het KB-examen iets eenvoudiger gemaakt dan bij het GL/TL-examen. Hier scoorden de KB-leerlingen echter zelfs een stuk beter op dan de GL/TL-leerlingen: met een p'-waarde van 90 blijkt wederom dat tekenvragen de KB-leerlingen wel liggen!
Ook in de eerste vraag van *Gevelvlag* (vraag 18) moest er getekend worden, namelijk het spiegelbeeld van een vlag. Ook hier scoorde men in het algemeen erg goed. De overige drie vragen van deze context stonden ook in het GL/TL-examen. De KB-leerlingen hadden beduidend meer moeite met deze berekeningen met de Stelling van Pythagoras, tangens en oppervlakte. Opvallend is dat, net als bij het GL/TL-examen, de scores op vraag 20 zeer overeenkomen met de scores op vraag 13. In beide vragen moest met de tangens gerekend worden. Gezien de p'-waarden van vraag 13 en 20 (respectievelijk 27 en 26) hebben KB-leerlingen hier erg veel moeite mee. Bij beide vragen scoorde ruim 60% van de leerlingen geen enkel punt.
De drie overlapvragen maken volgens de gegevens, net als in het GL/TL-examen, een goed onderscheid tussen de vaardige en minder vaardige leerlingen.
De laatste context van het examen was *Onweer*. Hier moest gerekend worden met de snelheid van het geluid en met afstanden. Bij de laatste vraag moest een

woordformule gemaakt worden. Dat ging niet goed: 70% van de leerlingen scoorde hier geen enkel punt en met een p'-waarde van 19 was het de slechtst gemaakte vraag van het examen. Geen fijne vraag om een examen mee af te sluiten.
Het CvE besloot de N-term voor dit examen vast te stellen op 0,7. Dat resulteerde in een examen met 35,6% onvoldoendes en een gemiddeld cijfer van 6,0.

**Overlap KB en GL/TL**

In totaal waren er 9 vragen die zowel in het KB-examen als in het GL/TL-examen zaten. Er waren in totaal 27 punten te behalen; ***zie tabel 5*** [VMBO overlap GL/TL-KB] voor details. De KB-leerlingen scoorden op de overlap een gemiddelde p'-waarde van 44,3. Voor het deel van het examen dat specifiek voor KB is, scoorden ze een gemiddelde p'-waarde van 67,0. De KB-leerlingen scoorden dus beduidend beter op het KB-specifieke deel dan op het overlapgedeelte. Dit is ook wat de examenmakers beoogden.
De GL/TL-leerlingen scoorden een gemiddelde p'-waarde van 66,4 op het overlapgedeelte. Het verschil met KB is groter dan voorgaande jaren. Op het GL/TL-specifieke deel scoorden de GL/TL-leerlingen een gemiddelde p'-waarde van 60,3. Een conclusie die de examenmakers hieruit moeten trekken, is dat het GL/TL-specifieke deel wel wat lastiger had gemogen.

**HAVO A**
**[Jos Remijn]**

Het examen havo wiskunde A werd dit jaar voor de tweede keer volgens het nieuwe 2007-programma afgenomen. Vergeleken met vorig jaar was dit examen gemakkelijker. Het CvE bepaalde de N-term op 0,5. Dit leidde tot een gemiddeld cijfer van 6,3 met 27% onvoldoendes. Net als vorig jaar koos zo'n 65% van alle havo-kandidaten het vak wiskunde A. Voor C&M-kandidaten blijft het vak duidelijk problemen geven. In de steekproef bevond zich 12% C&M-kandidaten met een gemiddelde van 5,5 en 48% onvoldoendes. Dit jaar scoorden de N&G-kandidaten (21%) nauwelijks beter dan de E&M-kandidaten, een opmerkelijk verschil met vorig jaar, toen de N&G-ers gemiddeld 0,4 punt hoger scoorden.

In deze opgave bekijken we het percentage van de maximale capaciteit van het netwerk dat gebruikt wordt voor het gastransport. Dit percentage $P$ wordt gegeven door de volgende formule. Hierin is $T$ de buitentemperatuur in °C.

$$P = 5,5 + \frac{18 - T}{30} \cdot 94,5$$

De gasleverancier komt dus in de problemen op dagen dat de buitentemperatuur lager is dan –12 °C.
Volgens het KNMI gebeurt dat niet vaak. Zij hebben elk jaar op alle 90 dagen van de winterperiode de temperatuur gemeten. Uit hun gegevens blijkt dat in de afgelopen 100 jaar in totaal op slechts 21 dagen de buitentemperatuur lager was dan –12 °C.
Hiermee kunnen we de kans schatten dat op een willekeurige dag in de winterperiode de buitentemperatuur lager is dan –12 °C.

12 Schat deze kans door middel van een berekening.

De formule voor $P$ kun je herleiden tot de bekende vorm:

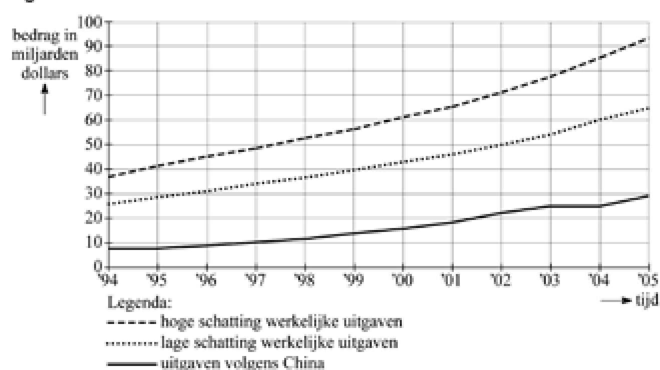
$$P = a \cdot T + b$$

13 Bereken $a$ en $b$.

figuur 3 Uit: HAVO-A 2010 (Gastransport)

China ontwikkelt zich in hoog tempo tot grootmacht, ook op het militaire vlak. Het Pentagon, het Amerikaanse Ministerie van Defensie, houdt de Chinese defensie-uitgaven nauwlettend in de gaten. In figuur 1 staan de Chinese defensie-uitgaven volgens China zelf en volgens twee schattingen van het Pentagon, een hoge en een lage. Duidelijk is te zien dat het Pentagon uitgaat van veel hogere defensie-uitgaven dan China opgeeft.

**figuur 1**




In figuur 1 is te zien dat de hoge schatting van de uitgaven vanaf 1994 tot 1999 (nagenoeg) lineair toenam van 37 miljard dollar tot 56 miljard dollar. Stel dat deze lineaire toename ook na 1999 was doorgegaan.

6 Bereken hoe groot de hoge schatting van de uitgaven dan in 2003 zou zijn geweest.

(...)
In 2005 was de lage schatting 65 miljard dollar en de hoge 93 miljard dollar, een verschil van 28 miljard dollar.
Voor de jaren na 2005 voorspelde het Pentagon dat de defensie-uitgaven exponentieel zouden blijven toenemen. Voor de lage schatting (in deze periode) ging het Pentagon uit van een jaarlijkse groei van 8,5% en voor de hoge schatting van 9,5%.

8 Bereken in welk jaar het verschil tussen de lage en de hoge schatting voor het eerst meer dan 50 miljard dollar zal zijn.

figuur 4 Uit: HAVO-A 2010 (China's defensie-uitgaven)

Een derde deel van de docenten die de regiovergaderingen bezochten, vond het niveau van dit examen te laag. De helft van de daar aanwezige docenten ziet graag wat meer vragen met algebra. Omdat vragen 10 en 11, waar geredeneerd moest worden met een formule, niet als vragen over algebra herkend werden, was voor velen vraag 13 de enige echte algebravraag in het examen; ***zie figuur 3***. Met een p'-waarde van 13 was dit veruit de moeilijkste vraag van het examen. Kennelijk zijn dergelijke standaardvragen voor de kandidaten toch veel te lastig. Evenwel, dergelijke vragen zullen in het examen blijven voorkomen.
Van het forum werd ook dit jaar veel door docenten gebruik gemaakt. Net als vorig jaar werd daar door docenten weer gevraagd om een duidelijk CvE-standpunt over breien, notatiefouten en afrondingen. De absolute koploper was de discussie over vraag 8; ***zie figuur 4***. Hierover konden maar liefst 72 bijdragen van collega's worden genoteerd. De opgave had de Chinese defensie-uitgaven als onderwerp. In vraag 8 werd gevraagd in welk jaar het verschil tussen twee schattingen voor het eerst meer dan 50 miljard dollar zou zijn. Dit kon worden berekend door uit te gaan van de gegevens in het jaar 2005 en dan met een (continu) exponentieel model te rekenen. De oplossing van de vergelijking was 5,3 en dit moest dan wel correct (naar boven) worden afgerond naar het gehele getal 6, zodat het antwoord 2011 was. Het ging hier om defensie-uitgaven in een jaar, de waarde 5,3 betekent dan dus helemaal niets. Veel docenten lieten op het forum zien dat ze deze vraag niet helemaal hadden begrepen. Men liet via foutieve en gekunstelde redeneringen zien dat het antwoord 2010 ook te verdedigen was, of zelfs beter was dan 2011. In de discussie werd het tijdstip waarop de schatting werd gedaan, betrokken. Er werd zelfs geopperd dat het Pentagon misschien wel dagelijks een schatting maakte, zodat het antwoord (april) 2010 was. Maar de correcte terugvertaling naar het probleem verdween uit beeld. Omdat dit een belangrijk element in het vak wiskunde A behoort te zijn, is deze onzekerheid bij de docenten een zorgelijke zaak.

Een korte bespreking van het examen per opgave. Het examen kende 23 vragen, verdeeld in vijf opgaven; ***zie tabel 6*** [HAVO A 2010] voor de details. De startopgave *Een tenniswedstrijd* was een herkenbare kansvraag. Docenten waren niet te spreken over de vragen 2 en 5: daar werden steeds twee vragen in één gesteld. Hoewel van kandidaten mag worden verwacht dat ze goed lezen, werd dit toch als ongewenst bestempeld. De opgave *China's defensie-uitgaven* vroeg naar vaardigheden rondom extrapoleren, exponentiële groei en procentrekenen. Hier viel vooral op dat de vragen 8 en 9, waarschijnlijk vanwege de economische context, door kandidaten met een E&M-profiel duidelijk beter werden gemaakt dan de N&G-kandidaten. De opgave *Gastransport* vroeg om een goed begrip van de gebruikte formule. In de opgave *Kogelwerende vesten* kwam wederom de kansrekening aan de orde. Deze opgave is goed gemaakt, met uitzondering van vraag 16: daar werd een redenering gevraagd en dat blijkt lastig. De slotopgave *Brandstofverbruik* werd ook goed gemaakt. De laatste twee vragen handelden over een gebroken formule.
Er was bij vraag 23 bij de docenten ongenoegen over de vraagstelling 'onderzoek met de GR'. Er waren kandidaten die aangaven niet te weten wat met deze afkorting werd bedoeld. Jammer maar uiteraard een onbedoelde handicap en ook onverwacht: in de correctievoorschriften wordt de betreffende afkorting al diverse jaren telkenmale gehanteerd en je zou verwachten dat bij examentraining iedere leerling bekend zou zijn geraakt met deze formulering.

**HAVO B**
**[Paul van der Molen]**

In de aanloop naar de examens werd veel aandacht besteed aan havo wiskunde B. De bijzondere situatie waarin dit vak zich bevindt, maakte kennelijk veel los bij docenten. Docenten vinden dat er onvoldoende tijd is om het brede havo B-programma te doceren en om de stof (bij de leerlingen) te laten bezinken. Het examen van vorig jaar stelde daarbij ook nog eens hoge eisen. Deze spagaat heeft geleid tot gesprekken met het ministerie. Er zijn daarbij drie oplossingsrichtingen denkbaar:

- het uitbreiden van de hoeveelheid lestijd;
- het schrappen van onderdelen uit het programma;
- het verlagen van de norm.

Het is aan het ministerie om hierover een knoop door te hakken. Helaas hebben de gesprekken nog niet geleid tot concrete oplossingen.
Na het examen van vorig jaar met zijn hoge N-term en hoge percentage onvoldoende was iedereen wel benieuwd of de norm voor het examen dit jaar gehandhaafd zou blijven. Het examen heeft nu het daglicht gezien en de docenten hebben door middel van de regionale examenbesprekingen en twee vragenlijsten hun mening kenbaar kunnen maken (bij het schrijven van dit artikel waren de resultaten van de grote vragenlijst nog niet bekend). Het commentaar van de docenten was overduidelijk: het examen kreeg een slechte beoordeling. Waarom? Men vond het examen te moeilijk. De gemiddelde p'-waarde van 48,5 laat inderdaad zien dat leerlingen erg veel moeite hadden met dit examen.
Men vond het examen slecht leesbaar. Veel wiskundedocenten vinden het moeilijk te verteren dat hun dyslectische leerlingen nog zoveel moeten lezen.
Men vond dat het examen te weinig routinevragen bevatte. Leerlingen oefenen in de klas bepaalde standaardsommen. Men vond dat er te weinig vragen van dit type in het examen zaten.
Men vond het examen te lang. Ondanks dat er maar 17 vragen met slechts 77 punten in het examen zaten, hadden veel leerlingen een tijdprobleem. Men vond de startopgave niet goed gekozen.
Na het lezen van bovenstaande vijf redenen rijst de vraag: was het dan een slecht examen? Dat was het niet, althans in de ogen van de examenmakers. Ten eerste had het examen een goede betrouwbaarheid en voldeden de vragen toetstechnisch gezien ieder afzonderlijk. Bovendien valt er over bovenstaande vijf punten nog wel iets meer te zeggen:
Het vervolgonderwijs wenst een bepaald niveau. Het CvE houdt vast aan dat gewenste niveau.[3]
De teksten in een examen moeten wiskundig correct geformuleerd zijn. Dit is voor de gemiddelde havo-leerling vaak lastig te lezen. Deze leerling zou wellicht meer gebaat zijn bij slordig geformuleerde spreektaal, maar dat gaat niet op een examen. Het gebruik van contexten, dat veel tekst met zich meebrengt, maakt de wiskunde voor de leerling juist weer iets tastbaarder en zinvoller.

Van een bepaalde AWS bevindt de bovenkant van de drijver zich gemiddeld 4,0 meter onder de zeespiegel. De zeespiegel is de gemiddelde waterhoogte. Zie figuur 3. De hoogte $d$ van de bovenkant van deze drijver ten opzichte van de zeespiegel wordt nu beschreven door: $d = -4,0 + 3,5\sin(0,5t)$, met $d$ de hoogte in meter en $t$ de tijd in seconde.
De waterhoogte ten opzichte van de zeespiegel hangt af van de amplitude van de golven. Hiervoor geldt de formule $w = -A \cdot \cos(0,5t)$. Hierin is $w$ de waterhoogte in meter, $A$ de amplitude van de golven ($A \geq 0,5$) in meter en $t$ de tijd in seconde. In figuur 3 zijn grafieken van $d$ en $w$ getekend voor een bepaalde waarde van $A$.

**figuur 3**



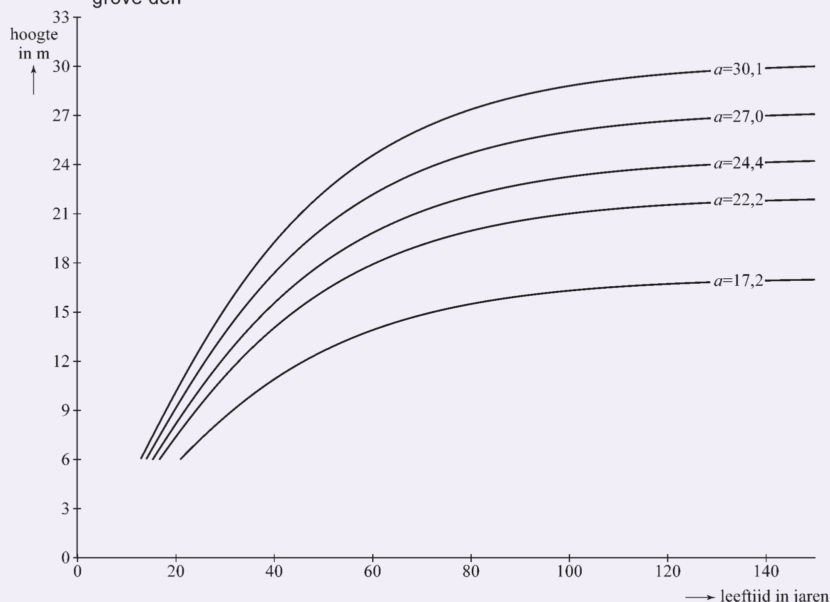
In de situatie van figuur 3 blijft de bovenkant van de drijver altijd onder water. Maar als de amplitude van de golfbeweging verder toeneemt, kan de drijver soms boven het water uitsteken.

**10** Onderzoek met de grafische rekenmachine vanaf welke amplitude van de golfbeweging de drijver af en toe boven water verschijnt. Rond je antwoord in meter af op één decimaal.

figuur 5 Uit: HAVO-B 2010 (Archimedes Wave Swing)

Het is de vraag wat als routinevraag beschouwd dient te worden. Veel vragen (ruim de helft) waren vragen zoals leerlingen ze ook in hun methodes tegenkomen. Sommige vragen (zoals de opgave *Raken*) zijn dan wel weer een samenstelling van meerdere routines. En bovendien blijven sommige routinevragen gewoon lastig (zoals vragen over exponenten en logaritme).
Leerlingen hebben lang zitten zwoegen op de lastige vragen. De tijdproblemen komen dus vooral voort uit het feit dat de leerlingen moeite hadden met de opgaven. Hoewel de startvraag prima was, werden vooral vraag 2 en 3 veel te complex gevonden. Beginnen met logaritme lijkt niet zo'n goed idee.
Naast al deze kritiek was er gelukkig ook nog wel positief nieuws. Over de hoeveelheid algebravragen was men wel tevreden, evenals over het aantal vragen met de GR en over het correctievoorschrift.

Dan volgt nu een bespreking van het examen aan de hand van de afzonderlijke opgaven; zie ook ***tabel 7*** [HAVO B 2010].
De opgave *Diersoorten* begon eenvoudig. De startvraag scoorde p' = 94. In de tweede vraag werd van de leerling een activiteit gevraagd die hij vermoedelijk nog niet eerder had gedaan. Het werd wel stapje voor stapje uitgelegd maar toch bleek dit voor veel leerlingen niet duidelijk, gezien de lage p'-waarde van 42. De derde vraag was de moeilijkste van het hele examen met p' = 21. Het manipuleren met logaritmen blijkt voor havo-leerlingen nog steeds erg moeilijk. We zien dat leerlingen algebraïsch een stuk vaardiger zijn geworden vergeleken met een paar jaar geleden. Dit is vooral goed zichtbaar bij lineaire, kwadratische en wortelvormen. Goniometrie, logaritmen en exponenten blijven problematisch. In de laatste vraag van *Diersoorten* konden de leerlingen eenvoudig 2 van de 3 punten scoren door de gegevens in te vullen in de formules. Vervolgens moest er goed worden nagedacht. Dit gaf nog de nodige stof tot discussie.
*Tetraëder van Bottrop* bleek een moeilijke opgave. De berekening van de exacte lengte van *CT* in het bovenaanzicht was bedoeld om leerlingen te helpen bij het berekenen van de hoogte van de tetraëder. Maar met p' = 31 en p' = 39 lijkt dit niet veel geholpen te hebben. Het ruimtelijk inzicht en de oefening met ruimtemeetkunde is hier vermoedelijk toch wel de beperkende factor. Sommige lesmethoden behandelen alle meetkunde in 4-havo en het lijkt er op dat leerlingen dan moeite hebben om die kennis voor het examen weer op te frissen. De laatste vraag over de tetraëder (het tekenen in het bovenaanzicht) ging daarentegen verrassend goed.
De opgave *Raken* was een opgave waar de leerlingen meerdere vaardigheden moesten combineren. Het differentiëren bleek allereerst al een grote hobbel. Het kunnen bepalen van de verticale verschuiving werd daardoor wel vertroebeld. Met p' = 29 is deze vraag erg moeilijk gebleken.
De opgave *Archimedes Wave Swing* (*AWS*) bevatte een interessante context met redelijk wat leeswerk. De eerste vraag was een standaardvraag. De tweede vraag was een wel erg creatieve vraag. Er is behoorlijk wat ophef ontstaan over het afronden dat hier moest gebeuren; ***zie figuur 5***. Bij *A* = 1,94 kwam de bovenkant van de drijver net boven water en daarom moest worden afgerond naar 2,0. Hier moest toch echt even nagedacht worden. De laatste twee vragen van deze context scoorden goed met p' = 76 en p' = 79. Het werken met modellen (kwadratisch en lineair) leverde geen al te grote problemen op.
De opgave *Snijpunt* was een standaardopgave over het oplossen van een exponentiële vergelijking. Het werken met exponenten blijft (zoals reeds eerder vermeld) lastig voor deze groep. Met p' = 41 konden de examenmakers zich niet aan de indruk onttrekken dat de vaardigheid in het werken met exponenten niet exponentieel is toegenomen.
Vervolgens kwam *Bloempot*. Hier is slecht op gescoord. Juist bij deze vragen is goed te zien hoeveel minder vaardig deze populatie is vergeleken met de B12-populatie van twee jaar terug. Een ander opmerkelijk verschijnsel is dat jongens het op deze opgave veel beter deden dan meisjes (een verschil van 12 p-punten).
Het examen eindigde met *Wortelfunctie*.




Het ziet ernaar uit dat je aan de waarde van $a$ kunt zien hoe groot de verschillende grove dennen uiteindelijk worden.

4p **12** Onderzoek aan de hand van de formule of dit inderdaad het geval is voor de grafiek die hoort bij $a = 30{,}1$.

Als je naar figuur 1 kijkt, kun je je afvragen of deze grafieken door de oorsprong (0, 0) gaan als we ze verder naar links zouden doortekenen. Dit is inderdaad het geval.
Sterker nog: dit is het geval voor **alle** grafieken die horen bij de algemene formule $h = a\left(1-b^t\right)^c$ van Chapman-Richards.

4p **13** Beredeneer, dus zonder getallenvoorbeelden te gebruiken, dat **alle** grafieken die horen bij de formule van Chapman-Richards door de oorsprong gaan.

figuur 6 Uit: VWO-A 2010 = VWO-C, vraag 6 (Boomgroei)

De eerste vraag was standaard. De tweede daarentegen bevatte een aantal creatieve onderdelen. Deze vraag kan nu dankzij de verhoogde aandacht voor algebra in het huidige programma gesteld worden. Met p' = 49 ging dit lang niet slecht. Er waren docenten die het jammer vonden dat deze opgave helemaal aan het eind zat. Hij was namelijk goed te doen. Zij hadden verwacht dat veel leerlingen nog beter op deze vraag hadden kunnen scoren als deze opgave verder naar voren in het examen had gezeten. Alle informatie hierboven in ogenschouw nemend, heeft het CvE de N-term vastgesteld op 1,5 met gemiddeld cijfer 5,9 en onvoldoendepercentage 38,0.

Tot slot nog wat andere interessante informatie. Het aantal deelnemers aan havo B blijkt behoorlijk toegenomen, van ruim 12000 vorig jaar naar bijna 15000 dit jaar. Van deze leerlingen deed 11% een E&M-profiel, 15% een N&G-profiel, 36% een N&T-profiel en 38% deed een dubbel profiel N&G/N&T. De verdeling van de leerlingen over de verschillende vormen van wiskunde op havo was als volgt: 65% wiskunde A, 25% wiskunde B en 10% deed geen wiskunde. Ook wij als examenmakers zijn benieuwd in welke richting de verdeling zich de komende jaren zal ontwikkelen.

### VWO C (A1-bezem) / A / A12-bezem [Ger Limpens]

Examenjaar 2010 was het eerste jaar waarbij de herziene examenprogramma's (PEP-programma's/2007-programma's) in het vwo geëxamineerd werden. Ook bij de examenmakers leidt een programmaverandering altijd tot een verhoogde spanning: het is maar zeer de vraag in hoeverre de programmaveranderingen zoals die in de examens ingezet worden, aansluiten bij hetgeen er in het veld in het kader van die veranderingen verwacht wordt. Bovendien zorgen programmaveranderingen voor een verhoogde examenproductie in de vorm van bezemexamens, ook geen dagelijkse routine natuurlijk. Al met al reden genoeg ogen en oren open te houden vanaf het moment dat de betreffende examens afgenomen werden.

### VWO C

Bij vwo C kon al meteen geconstateerd worden dat niet iedere docent even blij was met het examen. Of die beperkte vreugde een gevolg was van de programma-

Bij hardloopwedstrijden over zeer grote afstanden spreekt men van ultralopen. De Atletiek Vereniging Texel organiseert om het jaar in de lente een ultraloop over maar liefst 120 km.
De ultraloop van 2005 werd bij de mannen gewonnen door Wim-Bart Knol. Hij legde de afstand af in 9 uur, 53 minuten en 48 seconden. Wij noteren dat in **wedstrijdnotatie** als 9:53:48.

Bij de vrouwen won Elke Streicher in 11:33:40. Knol liep dus sneller dan Streicher.

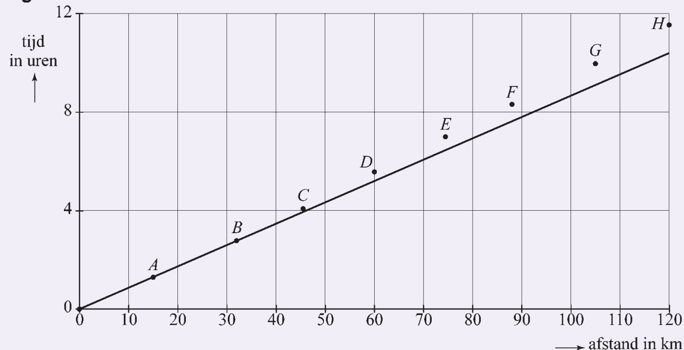
Bij controleposten langs het parcours noteerde men de tussentijden van de atleten. In tabel 1 zijn de gegevens van Streicher weergegeven.

**tabel 1**
tussentijden Streicher

| **afstand in km** | 15 | 32 | 45,5 | 60 | 74,5 | 88 | 105 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **tijd in wedstrijd-notatie** | 1:18:00 | 2:47:07 | 4:04:49 | 5:35:11 | 6:59:37 | 8:19:37 | 9:58:16 | 11:33:40 |
| **tijd in seconden** | 4680 | 10 027 | 14 689 | 20 111 | 25 177 | 29 977 | 35 896 | 41 620 |

De gegevens van tabel 1 zijn in figuur 1 grafisch weergegeven. Daar zie je op de horizontale as de afstand in kilometers en op de verticale as de bijbehorende tijd in uren. De punten $A$ tot en met $H$ corresponderen met de acht uitkomsten uit tabel 1. Ook is de lijn getekend die aangeeft hoe de ultraloop zou zijn verlopen wanneer Streicher de hele afstand had gelopen met haar gemiddelde snelheid over de eerste 15 km. Figuur 1 vind je ook op de uitwerkbijlage.

**figuur 1**




Met behulp van tabel 1 kun je narekenen dat de gemiddelde snelheid van Streicher gedurende de eerste 15 km hoger was dan gedurende de eerste 88 km. Maar je kunt dat ook zonder berekening zien in figuur 1.

**17** Leg uit hoe je dit zonder berekening uit figuur 1 kunt afleiden. Je kunt hierbij gebruik maken van de figuur op de uitwerkbijlage.

In 1997 liep Dirk Westerduin de race met een gemiddelde snelheid van 12,78 km/u. Dit beschouwen we als het record op de afstand 120 km.
Elke wedstrijdafstand $s$ kent een recordtijd. De recordsnelheid die daarbij hoort, noemen we $v$. Voor elke wedstrijdafstand $s$ kun je dus zeggen: “Het record op de $s$ km werd gelopen met een (gemiddelde) snelheid van $v$ km/u.”
Voor lange afstanden zoals ultralopen kan het verband tussen de afstand $s$ en de recordsnelheid $v$ vrij goed beschreven worden met de formule:

$$v = c - 3{,}32 \cdot \log s$$

Hierin is $c$ een constante.

Als we deze formule ook willen gebruiken voor korte afstanden, bijvoorbeeld de 100 meter met een toenmalig wereldrecord van 9,77 seconden, dan krijgen we een andere waarde voor de constante $c$ dan bij lange afstanden.

**18** Laat met een berekening zien dat dit inderdaad het geval is.

figuur 7 Uit: VWO-C 2010 (Ultralopen)

veranderingen valt echter te betwijfelen. Het examen vwo C was tevens bezem-examen A1. Dit toch wel bijzondere aspect zorgde eerder in dit cursusjaar voor wat onrust omdat docenten zich op zeker moment zorgen maakten rond de vraag of één examen twee toch echt wel verschillende examenprogramma's kon bedienen. Die onrust lijkt na afloop wat overbodig geweest te zijn: zover we weten is er na afloop nergens een opmerking uit het veld hierover geplaatst. Toch, zoals gemeld, werd vwo C niet met gejuich ontvangen. Men ervoer het niveau veelal als lager dan dat van vwo-A1-2009 en bovendien vond men het aantal vragen met algebraïsche vaardigheden te gering. Over die algebraïsche vragen komen we nog uitvoeriger te spreken bij vwo A maar wel kan al geconstateerd worden dat het laatste woord hierover nog niet gesproken zal zijn. Het lijkt er erg op dat voor veel docenten in het land algebraïsche vaardigheden synoniem zijn met het herschrijven van wiskundige uitdrukkingen. Een vaardigheid waarbij leerlingen met inzicht dienen te redeneren rond een algebraïsche uitdrukking wordt door velen niet als een algebraïsche vaardigheid ervaren en dit terwijl toch ook de PEP-syllabus wel degelijk aandacht voor een dergelijk aspect vraagt in het kader van algebra. Bij vwo A gaan we wat verder op deze problematiek in en proberen we te doorgronden hoe dat tweetal verschillende visies op algebra zich naast elkaar heeft kunnen ontwikkelen.
Het examen vwo C was, ondanks de lauwe ontvangst, een examen dat in onze ogen als een geslaagd examen beschouwd kan worden. Met een gemiddelde p'-waarde van 60,37 en p'-waardes van de verschillende vragen die varieerden van 16 (vraag 6) tot 88 (vraag 4) leidde dit examen met een N-term van 0,8 tot een gemiddeld cijfer van 6,2 en 26,3% onvoldoende. Hierbij baseren we ons natuurlijk op de gegevens van de versnelde correctie waarbij dit jaar 2804 kandidaten in de analyse meegenomen werden. Aan de hand van die analyse lijkt trouwens de conclusie gerechtvaardigd dat dit examen van adequate lengte is geweest: tijdnood lijkt niet structureel gespeeld te hebben.
De eerste context *Verzekering* bestond slechts uit twee vragen; ***zie tabel 8*** [VWO C 2010]. De openingsvraag van deze context scoorde een p'-waarde van 82 en was daarmee in onze ogen geschikt als openingsactiviteit. Daar dacht niet iedereen zo over: hier en daar werd geklaagd over de vermeende ongeschiktheid van de thematiek van een uitvaartverzekering. Natuurlijk is dit een punt van discussie geweest in de voorgeschiedenis van dit examen: bij een proefversie die ruimschoots voor de afname van dit examen aan diverse deskundigen is voorgelegd, is niet geconstateerd dat men aanstoot nam aan de context als zodanig: kennelijk was men, met de examenmakers, van mening dat voldoende prudent met de materie omgegaan werd. De context werd overigens ook gebruikt in het vwo A-examen en daar is in dit kader geen negatief geluid vernomen. Het lijkt erop dat de criticasters bij C zich 'slechts' stoorden aan het feit dat dit de openingsopgave was, iets dat bij de examenmakers de vraag oproept hoe het kan dat de thematiek als minder storend ervaren wordt als je als kandidaat verder gevorderd bent in het examen.
De tweede context, *Boomgroei*, opende met drie vragen die als behoorlijk eenvoudig gekenmerkt kunnen worden: p'-waarden van achtereenvolgens 77, 88 en 86 vertellen dat het merendeel van de kandidaten hier goed mee uit de voeten bleek te kunnen. Toch leidde vraag 3 tot nogal wat discussie op het forum rond de interpretatie van 'het vierde levensjaar'. Ook de term 'na hoeveel jaren' was kennelijk niet voor iedere kandidaat/docent even helder. Gelukkig gaf het antwoordmodel bij deze vraag de mogelijkheid om zowel een antwoord in een geheel aantal jaren te geven als een antwoord in een nauwkeuriger benadering. De laatste vraag van *Boomgroei* echter won het echter ruimschoots wat betreft het commentaar. Het betrof hier een redenering rond een algemene formule waarbij zonder getallenvoorbeelden moest worden nagegaan dat alle bijbehorende grafieken door de oorsprong gaan (***zie figuur 6***). Dat veel leerlingen na moeten denken over de bedoeling van de toevoeging 'zonder getallenvoorbeelden' is niet vreemd. Maar wel riep het in de ogen van de examenmakers nogal wat vragen op dat veel collega's die toevoeging in tegenspraak vonden met de redenering waarbij de coördinaten van de oorsprong gebruikt werden. Als die oorsprong kern van het onderzoek is, lijkt het in onze ogen niet goed vol te houden dat dit hier gezien kan worden als een getallenvoorbeeld. Hoe dat ook zij, duidelijk is dat vraag 6 de moeilijkste vraag was van dit examen: p' = 16. Niet minder dan 65% van de kandidaten wist hier geen enkel punt te scoren en slechts 8% van de kandidaten scoorde hier het volle pond.
Daarop volgde de context *Stoppen met roken*. De eerste vraag, een vraag rond het lezen van een tabel en bijbehorend procentrekenen, deed het met p' = 76 niet slecht. Ook de drie daaropvolgende kansvragen werden door veel leerlingen goed beantwoord, zo leert de analyse. Vraag 11, de laatste vraag van deze context, daarentegen was duidelijk een lastigere. Hierbij moest door een redenering uit het ongerijmde aangetoond worden dat een specifieke verdeling niet normaal verdeeld kon zijn. De vuistregels van de normale verdeling konden hier ingezet worden. Consultering van het forum van de Vereniging leert dat deze vraag zelfs voor een enkele collega interessante oefenstof moet zijn geweest...
*Schoonheidssalons* was de vierde context en ook deze opende met een tabel en bijbehorend procentgereken. Uiteraard dient bij het lezen van een tabel wel nagedacht te worden: zo was uit de tabel niet onmiddellijk af te lezen dat er 649 salons waren met elk 2 personen in dienst. De kritiek dat dit een strikvraag zou zijn, zouden we willen bestrijden met de opmerking dat de betreffende tabel 'in het wild' is aangetroffen en ook de betreffende vraag aldaar aan de orde kwam. Na een betrekkelijk probleemloze vraag 13 (p' = 72) volgde vraag 14, met p' =21 een van de moeilijkste vragen van dit examen, rond de al dan niet vermeende evenwijdigheid van twee grafieken. Dit heeft nogal wat stof doen opwaaien. En hoewel we niet anders kunnen dan constateren dat de vraag naar de evenwijdigheid een vraag was die bij ons als makers natuurlijkerwijze opdoemde bij het zien van de grafiek, moeten we ook constateren dat er nogal wat collega's zijn die een dergelijke gedachte niet bleken te hebben en zich al helemaal niet konden vinden in de wijze waarop die vraag hier verwoord werd. Wij nemen daar nota van en trekken daar een les uit.
De context *Ultralopen* was de vijfde maar niet de laatste context van dit examen. Openend met een berekening van een gemiddelde snelheid, vervolgde de opgave met een vraag over een bijzondere grafiek waarbij de tijd nu eens niet langs de horizontale maar langs de verti-

cale as geplaatst werd; ***zie figuur 7 op pag. 10.*** Ook deze grafiek is niet door de examenmakers verzonnen maar 'in real life' aangetroffen, iets dat ook niet echt verwonderlijk is, gezien het feit dat er toch echt op zekere afstanden tijdwaarnemers staan bij een evenement als een ultraloop. Het commentaar dat hierop op sommige plekken door collega's vermeld werd, wordt door de examenmakers dan ook absoluut niet gedeeld: juist omdat deze weergave niet de standaardrepresentatie betreft, is een vraag als de onderhavige er een waarbij op zinvolle wijze naar begrip en inzicht gevraagd wordt. Overigens werd de vraag niet beroerd gemaakt: p' = 54.
Niet bepaald standaard was het aantal contexten van dit examen: *Het Doubema* was de zesde opgave, een opgave gevuld met kansgebonden activiteiten. Vermeldenswaardig hier is wellicht het aspect dat vraag 21 een duidelijk alles-of-niets-karakter toont in de analyse: de vraag scoorde met p' = 62 niet slecht maar bijzonder is wel dat maar liefst 33% van de leerlingen geen enkel punt bleek te scoren terwijl daarentegen 55% de maximale score 3 behaalde. De overblijvende groep werd min of meer gelijkelijk verdeeld over score 1 en score 2.

### VWO A

Zoals al bij de bespreking van vwo C werd aangegeven, was ook hier het thema algebraïsche vaardigheden een heet hangijzer. Die algebra zat in de ogen van de makers in vragen als 10, 12, 13 en 20. Daarbij werd veel aandacht gegeven aan het redeneren binnen het kader van een gegeven formule. Door verschillende collega's werd juist aangegeven de algebra in dit examen te missen. Uit hun commentaren valt op te maken dat men daarbij veelal denkt aan het manipuleren/herleiden van wiskundige uitdrukkingen. Toch zouden de examenmakers deze plek graag willen gebruiken om een lans te breken voor een wat ruimere blik op het onderwerp algebraische vaardigheden, daarbij ook verwijzend naar de PEP-syllabus. Waarmee niet gezegd is dat herleiden en aanverwante zaken in de toekomst in examens wiskunde A en/of C niet aan de orde gesteld zouden worden: uiteraard valt dit onder de te examineren aspecten. Wel menen we te constateren dat de discrepantie die er op een aantal plaatsen waar te nemen valt tussen onderwijs en

Er geldt: $l = 10\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$ en $b = 6\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$.

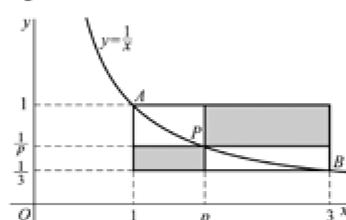
**5** Bereken exact de waarde van $b$ als $l = 8$.

figuur 8 Uit: VWO-B 2010 (Onderzetter)

---

De punten $A(1, 1)$ en $B(3, \frac{1}{3})$ liggen op de grafiek van $y = \frac{1}{x}$.
We bekijken de rechthoek waarvan $A$ en $B$ hoekpunten zijn en waarvan twee zijden evenwijdig zijn aan de $x$-as (en de andere twee zijden dus evenwijdig zijn aan de $y$-as).
Een punt $P(p, \frac{1}{p})$ ligt op de grafiek van $y = \frac{1}{x}$, tussen $A$ en $B$. De horizontale en de verticale lijn door $P$ verdelen de rechthoek in vier rechthoekige stukken.
In figuur 1 zijn de stukken rechtsboven en linksonder grijs aangegeven.

**figuur 1**




**14** Bereken langs algebraïsche weg voor welke waarden van $p$ de oppervlakte van het grijze stuk rechtsboven gelijk is aan $\frac{1}{2}$.

figuur 9 Uit: VWO-B 2010 (Een rechthoek in stukken)

veld zeer waarschijnlijk (mede?) veroorzaakt wordt door het feit dat de syllabus ooit verschenen is zonder vergezeld te worden van een voorbeeldexamen dan wel een toetsmatrijs. Verder is de betreffende syllabus rijk gevuld met allerlei aspecten rond die algebraïsche vaardigheden: de indruk kan dan heel gemakkelijk gewekt worden dat de nadruk op die algebra een veel grotere is dan in werkelijkheid door de examenmakers in opdracht van en in overleg met de CvE-vaksectie wiskunde A werd nagestreefd. Dan is het wellicht in retrospectief niet zo vreemd te zien dat methodeschrijvers, de een meer dan de ander, een bepaalde kant op gaan waar examenmakers een andere richting blijken te bewandelen, daarbij onafhankelijk van elkaar opererend. Al met al in onze ogen een pleidooi om bij toekomstige programmaveranderingen de verschillende spelers in het veld meer inzicht in elkaars agenda's te bieden.
*Marathonloopsters* was de eerste context van dit examen; voor details ***zie tabel 9*** [VWO A 2010]. Ook het veld bleek tevreden met het feit dat dit de openingsopgave was. En de p'-scores lijken dat te bevestigen: een vriendelijk examenbegin. Wel is het nog de moeite waard de aandacht te vestigen op de discussie rond vraag 2, waarbij onmiskenbaar het model en niet, zoals hier en daar toch wel gedacht bleek te worden, de empirie moest leiden tot een conclusie rond de mogelijkheden van een 52-jarige marathonloopster. Dat met het model ook de grafiek van de gegeven formule bedoeld kon worden, valt niet te ontkennen maar de 'zigzaglijn' valt echt niet onder die interpretatie.
*Stoppen met roken*, de tweede context, vertoonde grote overlap met de context onder dezelfde naam van vwo C. Wel was ook een A-specifieke activiteit als hypothesetoetsen ondergebracht in deze context, deze keer in de vorm van een tekentoets. Zoals gebruikelijk was dat voor nogal wat leerlingen vrij lastig: 40% van de kandidaten scoorde hier geen enkel punt. De p'-waarde van de betreffende vraag 7 was eveneens 40.
Ook de derde opgave, *Boomgroei*, vertoonde overlap met het vwo C-examen. Aandacht voor differentiëren was er hier ook: in vraag 10. Dat gebeurde in de vorm van een redeneervraag: de afgeleide was reeds in de opgave vermeld en de kandidaat moest het gedrag van die afgeleide in verband brengen met de groei van de oorspronkelijke functie. Lastig, zo blijkt uit de analyse: p' = 38. De laatste vraag van *Boomgroei*, dezelfde redeneervraag als bij vwo C rond de grafiekenbundel die door de oorsprong liep, bleek ook hier de lastigste vraag van het examen met p' = 33 (***zie figuur 6 op pag. 9***).
De vierde context was de opgave *Inkomen* met als eerste vraag een vraag waarbij het begrip 'lineair interpoleren' aan de orde was. Ongetwijfeld zal geen docent van mening zijn dat de hiermee samenhangende vaardigheid door vwo A-leerlingen niet beheerst dient te worden. De discussie die hierover plaatsvond, had echter met de kennis van het begrip, de terminologie te maken. Geconstateerd moet worden dat de term 'interpoleren' enkele jaren geleden in goed overleg tussen Vereniging, methodeschrijvers en examenmakers in de vernieuwde nomenclatuurlijst is opgenomen. Die lijst maakte onderdeel uit van het nomenclatuurrapport dat 2½ jaar geleden aan het bestuur van de vereniging is aangeboden en publiek gemaakt. Dat vervolgens examenmakers wel en methodeschrijvers kennelijk niet besloten hebben terug te kunnen vallen op dit begrip is heel erg jammer. De vraag zelf scoorde met p' = 59 niet onverdienstelijk maar zou het wellicht beter gedaan hebben als het betreffende begrip overal wortel zou hebben geschoten.
Vraag 16, over een lognormaal-verdeelde grootheid, deed het overigens ook niet slecht: p' = 46 viel ons, examenmakers, eigenlijk niet tegen. Overigens getuigde ook hier het commentaar – waarbij min of meer geconstateerd werd dat die examenmakers toch altijd rare dingen weten te verzinnen van een enkeling op het forum, niet van al te veel bekendheid met de lognormale verdeling die bij nogal wat in de realiteit voorkomende verdelingen opduikt.
Als slotcontext was er de opgave *Verzekering*. De eerste twee vragen van deze opgave doken al eerder bij vwo C op. En de laatste vraag van deze context (p' = 53), tevens de laatste vraag van dit examen was, zoals hierboven aangestipt, een redeneervraag die in zijn relatieve scoreopbouw een mooi regelmatig verloop kende: 25% scoorde 0 punten, 11% had 2 punten, waarna volgden 20%, 16% en 29%.
Uit de analyse (13323 kandidaten) bleek geen reden om te constateren dat dit examen een te grote lengte gehad zou hebben. De gemiddelde p'-waarde van het examen vwo A was 61,36. Met een N-term van 0,7 leverde dit als gemiddelde een 6,2 op en 25,2% onvoldoende. Vermeldenswaardig is wellicht ook het feit dat de 5618 jongens in de steekproef het met p' = 53,25 een klein beetje beter deden dan de 7705 meisjes met p' = 52,42. De verschillen in p'-waarde tussen de kandidaten uit de verschillende profielen waren daarentegen groter: C&M (1472 kandidaten): met p' = 47,61; E&M (6231 kandidaten): met p' = 52,60; N&G (2964 kandidaten): met p' = 55,98.

**Overlap VWO C en A**

De verandering in omvang van de overlap tussen beide wiskundevakken in de PEP-programma's (alles wat onder beschrijvende statistiek valt, is geen onderdeel van de te examineren CE-stof van wiskunde C maar wel van wiskunde A) heeft niet geleid tot een substantiële verandering van de overlap in de examens; ***zie tabel 10*** [VWO overlap C-A] De maximale score van de vragen in de overlap was dit jaar 30, een score die niet structureel afwijkt van het verleden. En ook het verschil in gebleken vaardigheid op de overlapactiviteiten lijkt niet op substantiële veranderingen ten opzichte van het recente verleden te duiden: in p'-waarde is dat verschil op de overlap 9, volledig in lijn met het verschil op de overlap tussen wiskunde A1 en A12. Uiteraard manifesteert dat verschil zich bij moeilijkere vragen eerder dan bij eenvoudige: vergelijk het verschil tussen de scores 86 en 90 bij vraag C-5/A-11 met dat tussen de scores 16 en 33 bij vraag C-6/A-13.

**VWO A12-bezem en de overlap met VWO A**

Het bezemexamen vwo A12 bestond, net als vwo A, uit 5 verschillende contexten. Drie van deze contexten kwamen ook in het vwo A-examen voor: *Marathonloopsters*, *Stoppen met roken* en *Inkomen* waren identiek aan hun pendanten in vwo A. De contexten *Contributie* en *Klokken* kwamen daarentegen enkel in het bezemexamen voor. De tabel met p'-waarden, ***zie tabel 11*** [VWO A12-bezem], geeft wat specifiekere informatie over de verschillende vragen, maar dient wel van de kanttekening voorzien te worden dat deze tabel gebaseerd

is op de resultaten van slechts 56 kandidaten: de leerlingen van het vavo worden niet in de Cito-analyse betrokken. ***Uit tabel 12*** [VWO overlap A – A12-bezem] waarin de overlap met vwo A in kaart gebracht wordt, valt af te lezen dat deze 56 A12-kandidaten een gemiddelde p'-waarde van 56 op de overlap haalden waar de A-kandidaten op diezelfde overlap p'= 65 haalden. Het trekken van een conclusie over de gestegen vaardigheid van de A-populatie lijkt echter enkele bruggen te ver: de bezempopulatie is niet het juiste referentiekader hiervoor en bovendien is de steekproef van 56 in dit opzicht onverantwoord klein.
Voor het bezemexamen is een N-term van 0,8 vastgesteld. Het gemiddelde van de groep van 56 bezemkandidaten kwam daarmee op 5,9 en het percentage onvoldoende werd 37,5 (wat inhoudt dat 21 van deze bezemkandidaten een onvoldoende opliepen). Ook hier geeft de analyse trouwens geen aanleiding om te veronderstellen dat er sprake zou zijn geweest van een te lang examen.

### VWO B / B1-bezem / B12-bezem [Ruud Stolwijk]

Het examen vwo wiskunde B is in het algemeen goed ontvangen. Van dit eerste examen in het nieuwe vwo B-programma kan hooguit gezegd worden dat het wat aan de lange kant was. Verder bleek de verwerking van de veranderingen ten opzichte van het oude programma in lijn met de verwachtingen van de overgrote meerderheid van de docenten. Met name de hoeveelheid algebra (een punt dat immers veel aandacht krijgt) sloot niet alleen bij deze verwachtingen aan, maar ook bij de weg die op dit terrein de afgelopen jaren in de vwo B-examens al was ingeslagen.
De analyses van dit examen vonden plaats op basis van gegevens van 14 095 leerlingen, waarvan bijna 3100 van buiten het N&T-profiel. Dat de N&T'ers de beste scores leverden, verbaast ongetwijfeld niemand, en verder zal het ook geen verbazing wekken dat qua domeinverdeling de analyse-onderdelen het met een gemiddelde p'-waarde van 65 het beste deden. De goniometrie (die in de opgave *Onderzetter* aan de orde kwam) bleef met een gemiddelde p'-waarde van 54 misschien wat achter bij de verwachtingen. En wat het van tevoren door menigeen met angst en beven bekeken domein meetkunde betreft: leest u vooral verder!
Het examen begon met een analyse-opgave, *Gelijke oppervlakten*. De keuze voor deze opgave als startopgave leverde redelijk wat kritiek op, maar kijkend naar de uiteindelijke resultaten (***zie tabel 13*** [VWO B 2010]) blijkt het niet eenvoudig in deze opgavenset een betere startvraag te vinden. Vraag 2 kostte veel leerlingen veel tijd, niet altijd met het gewenste eindresultaat, maar de meeste leerlingen wisten daar toch wel 3 of meer punten te scoren.
De goniometrie kwam in de opgave *Onderzetter* aan bod. In ieder geval één vraag van deze opgave bleef verre van onopgemerkt: op het forum op de site van de NVvW ging ruim 40% van de reacties over vraag 5: 'Bereken exact de waarde van $b$ als $l = 8$.' Een vraag zoals die de afgelopen 10 jaar wel vaker gesteld is, en (in de beleving van in ieder geval de examenmakers) geformuleerd op een manier die duidelijk maakt dat inzet van de grafische rekenmachine hier niet is toegestaan. Een blik in het in opdracht van de NVvW opgestelde en in september 2007 verschenen Nomenclatuurrapport leert het volgende: 'de term "bereken" laat de wijze van berekenen vrij, maar de toevoeging 'exact' legt beperkingen voor de wijze van berekenen op.' Deze beperkingen zouden iedere leerling en docent bekend behoren te zijn, en zij staan simpelweg niet toe dat aan een oplossing waarbij een leerling iets als '$\sin(\cos^{-1}(0{,}8)) = 0{,}6$' noteert, alle punten mogen worden toegekend; ***zie figuur 8***.
Als derde opgave volgde een meetkunde-opgave, en dat is hier aanleiding om een paar zinnen te wijden aan het domein meetkunde. En dan doelen we niet op het feit dat sommige docenten bij vraag 9 liever, in plaats van de opdracht 'Teken', 'Construeer' hadden gezien, want dit laatste woord staat simpelweg niet in het Nomenclatuurrapport en kan daarmee niet in examens gebruikt worden. Wel wordt daarbij op het volgende gedoeld.
Tot vorig jaar stond voor leerlingen buiten het N&T-profiel – en dat waren er heel wat – de mogelijkheid open om wiskunde B1 (een vak zonder meetkunde) te volgen. Bovendien werd door de B12-leerlingen een flink aantal studielasturen besteed aan het domein (voortgezette) meetkunde.
In het nieuwe B-programma moesten al deze leerlingen het in inhoud en tijdsomvang flink afgenomen domein meetkunde doorwerken. Het veld was van tevoren terecht in gespannen afwachting van het gewenste niveau en de prestaties van de leerlingen op dit domein. ***Uit tabel 13*** [VWO B 2010] valt af te leiden dat de gemiddelde p'-waarde voor de meetkunde-onderdelen in het examen 52 is, wat betekent dat de leerlingen het dus heel aardig hebben gedaan op dit door velen terecht met de nodige zorg bekeken domein. Het betekent ook dat de inschatting vooraf door de examenmakers geen slechte was. Enig rumoer was er wel over de verplichting verwijzingen naar gebruikte stellingen te vermelden. Waarschijnlijk is hier voor een deel sprake van gewenning, met name voor docenten zonder B12-ervaring.
Het onderwerp in de opgave *Condensatoren* was weliswaar natuurkundig van aard, maar natuurkundige kennis was bij deze opgave niet noodzakelijk. Omdat uiteraard bij elke contextkeuze bij leerlingen sprake kan zijn van voordeel van specifieke kennis op het gebied van de context, wordt bij de formulering van dergelijke opgaven altijd extra zorgvuldig naar dit aspect gekeken. Blijkbaar was dat aardig gelukt: deze opgave was met een gemiddelde (gewogen) p'-waarde van 67 zelfs de best scorende opgave in het hele examen.
De volgende twee opgaven, *Een rechthoek in stukken* (***zie figuur 9***) en *Logaritmen en de vierde macht*, gaven weinig bijzonderheden: de bedoeling was duidelijk (waarbij de formulering 'Bereken exact' in de vragen 15 en 16 overigens geen enkele commotie veroorzaakte…), het correctievoorschrift voor vrijwel iedereen helder en de scores netjes.
Bij de laatste opgave, *Een geodriehoek*, werd voor het (standaard)bewijs van vraag 17 met een p'-waarde van 74 door de leerlingen goed gescoord. De laatste vraag bleek voor een deel van de leerlingen te veel van het goede: de vraag was te lastig, de tijd was te kort, of wellicht speelde een combinatie van beide; de al in het begin van dit stuk aangehaalde tijdnood manifesteerde zich hier, zeker voor een deel van de kandidaten.
Maar uiteindelijk deed dit examen met een N-term van 1,1, een gemiddeld cijfer van 6,4 en een percentage onvoldoende van 29,6 recht aan de vwo B-leerlingen.
Tot slot nog een kort woord over de bezemexamens B1 en B12. Op 'gewone' middelbare scholen (dus niet op ROC's,

particuliere scholen en dergelijke) nam slechts een klein aantal leerlingen deel aan deze examens. Op basis van de resultaten van 100 leerlingen besloot het CvE voor wiskunde B1 tot een N-term van 1,9. Dit leverde een gemiddeld cijfer van 5,8 met een percentage onvoldoende van 43. Op basis van de resultaten van 59 B12-leerlingen besloot het CvE voor dat vak tot een N-term van 2,8, wat voor wiskunde B12 een gemiddeld cijfer van 5,8 en een percentage onvoldoende van 41 tot gevolg heeft.

**Noten**

[1] De centrale examens (opgaven, bijlagen, correctievoorschrift) kunnen worden gedownload via de website van Cito (*www.cito.nl*);
vmbo: *www.cito.nl/vo/ce/vmbo/ex2010/eind_fr.htm*
havo/vwo: *www.cito.nl/vo/ce/havovwo/ex2010/eind_fr.htm*

[2] CvE staat voor *College voor Examens*. Het CvE is sinds najaar 2009 de opvolger van de CEVO.

[3] Uiteraard begrijpen we als examenmakers dat de (te?) geringe lestijd als gevolg heeft dat veel leerlingen dit niet aankunnen. Voor docenten is het frustrerend te zien dat de leerlingen niet kunnen wat ze hadden gehoopt.

**Over de auteurs**

Ger Limpens, Paul van der Molen, Jos Remijn, Melanie Steentjes en Ruud Stolwijk zijn wiskundemedewerkers en toetsdeskundigen van Cito te Arnhem (website: *www.cito.nl*).
Hun e-mailadressen zijn achtereenvolgens: *ger.limpens@cito.nl*, *paul.vandermolen@cito.nl*, *jos.remijn@cito.nl*, *melanie.steentjes@cito.nl* en *ruud.stolwijk@cito.nl*

## Tabel 1 – Leerlingenaantallen 2010

| VMBO | |
|---|---|
| Wiskunde BB digitaal | 18895 |
| Wiskunde BB | 886 |
| Wiskunde KB digitaal | 3232 |
| Wiskunde KB | 20933 |
| Wiskunde GL/TL | 46460 |
| totaal | 90406 |

| HAVO | |
|---|---|
| Wiskunde A | 37779 |
| Wiskunde B | 14828 |
| totaal | 52607 |

| VWO | |
|---|---|
| Wiskunde C (A1 bezem) | 3701 |
| Wiskunde A | 17529 |
| Wiskunde A12 bezem | 714 |
| Wiskunde B | 18082 |
| Wiskunde B1 bezem | 1721 |
| Wiskunde B12 bezem | 536 |
| totaal | 42283 |

**totaal generaal** **185296**

## Tabel 2 – Verzamelde N-termen

| 1e tijdvak 2010 | VMBO | | | | | HAVO | | VWO | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | BB (*) | BB papier | KB digitaal | KB papier | GL/TL | A | B | C | A | A12 bezem | B | B1 bezem | B12 bezem |
| N-term | variërend van 0,8 tot 1,6 | 1,4 | variërend van 0,9 tot 1,2 | 0,7 | 0,4 | 0,5 | 1,5 | 0,8 | 0,7 | 0,8 | 1,1 | 1,9 | 2,8 |
| gemiddelde | 6,5 | 6,7 | 6,1 | 6,0 | 6,0 | 6,3 | 5,9 | 6,2 | 6,2 | 5,9 | 6,4 | 5,8 | 5,8 |
| % onvoldoende | 24,0 | 22,9 | 31,0 | 35,6 | 33,8 | 27,1 | 38,0 | 26,3 | 25,2 | 37,5 | 29,6 | 43,0 | 41,0 |

(*) diverse varianten

## Tabel 3 – VMBO GL/TL 2010

| opgave | Stappenteller | | | | | Van B naar A | | | | | Magnetic | | | | Kogelstootbaan | | | Konijneneiland | | | | Gevelvlag | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| vraagnr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| max. score | 2 | 4 | 2 | 3 | 4 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 2 | 4 | 3 | 3 | 4 | 5 | 4 | 2 | 2 | 4 | 3 | 4 | 4 | 3 |
| p'-waarde | 83 | 49 | 27 | 69 | 51 | 87 | 56 | 58 | 85 | 52 | 68 | 95 | 78 | 84 | 55 | 36 | 24 | 80 | 92 | 68 | 51 | 74 | 56 | 72 |

## Tabel 4 – VMBO KB 2010

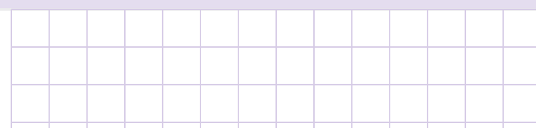
| opgave | Pitabrood | | | | Quetelet-index | | | | Van B naar A | | | | | Magnetic | | | | Gevelvlag | | | | Onweer | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| vraagnr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| max. score | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 2 | 4 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| p'-waarde | 82 | 85 | 73 | 36 | 93 | 71 | 69 | 85 | 73 | 45 | 35 | 68 | 27 | 53 | 77 | 46 | 90 | 86 | 48 | 26 | 47 | 74 | 46 | 62 | 19 |

## Tabel 5 – VMBO overlap GL/TL – KB

| | opgave | Van B naar A | | | | | Magnetic | Gevelvlag | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | max. score | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 2 | 4 | 4 | 3 |
| GL/TL | vraagnr. | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 22 | 23 | 24 |
| GL/TL | p'-waarde | 87 | 56 | 58 | 85 | 52 | 68 | 74 | 56 | 72 |
| KB | vraagnr. | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 19 | 20 | 21 |
| KB | p'-waarde | 73 | 45 | 35 | 68 | 27 | 53 | 48 | 26 | 47 |
| | verschil in p'-waarden | 14 | 11 | 23 | 17 | 25 | 15 | 26 | 30 | 25 |

## Tabel 6 – HAVO A 2010

| opgave | Tenniswedstrijd | | | | | China's defensie-uitgaven | | | | Gastransport | | | | Kogelwerende vesten | | | | | Brandstofverbruik | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| vraagnr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| max. score | 3 | 4 | 3 | 4 | 6 | 3 | 4 | 5 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 4 | 3 | 2 | 3 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 3 |
| p'-waarde | 93 | 86 | 62 | 59 | 63 | 79 | 44 | 58 | 59 | 56 | 69 | 59 | 13 | 86 | 67 | 44 | 86 | 65 | 89 | 78 | 63 | 53 | 36 |



### Tabel 7 – HAVO B 2010

| opgave | Diersoorten | | | | Tetraëder van Bottrop | | | Raken | AWS | | | | Snij-punt | Bloempot | | Wortelfunctie | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| vraagnr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| max. score | 3 | 5 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 7 | 3 | 5 | 5 | 5 | 6 | 5 | 5 | 4 | 5 |
| p'-waarde | 94 | 42 | 21 | 60 | 31 | 39 | 72 | 29 | 68 | 23 | 76 | 79 | 41 | 38 | 46 | 52 | 49 |

### Tabel 8 – VWO C 2010

| opgave | Verzeke-ring | | Boomgroei | | | | Stoppen met roken | | | | | Schoonheids-salons | | | | Ultralopen | | | Doubema | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| vraagnr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
| max. score | 3 | 3 | 5 | 3 | 3 | 4 | 4 | 3 | 3 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 3 |
| p'-waarde | 82 | 58 | 77 | 88 | 86 | 16 | 76 | 66 | 68 | 65 | 39 | 65 | 72 | 21 | 63 | 66 | 54 | 34 | 77 | 48 | 62 | 58 |

### Tabel 9 – VWO A 2010

| opgave | Marathon-loopsters | | | Stoppen met roken | | | | | Boomgroei | | | | | Inkomen | | | Verzekering | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| vraagnr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| max. score | 3 | 3 | 5 | 4 | 4 | 4 | 6 | 4 | 5 | 6 | 3 | 4 | 4 | 5 | 4 | 6 | 3 | 3 | 6 | 4 |
| p'-waarde | 97 | 91 | 71 | 88 | 56 | 81 | 40 | 49 | 81 | 38 | 90 | 59 | 33 | 59 | 67 | 46 | 85 | 64 | 41 | 53 |

### Tabel 10 – VWO overlap C – A

| | opgave | Verzekering | | Boomgroei | | | Stoppen met roken | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | max. score | 3 | 3 | 5 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| C | vraagnr. | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 10 | 11 |
| | p'-waarde | 82 | 58 | 77 | 86 | 16 | 76 | 65 | 39 |
| A | vraagnr. | 17 | 18 | 9 | 11 | 13 | 4 | 6 | 8 |
| | p'-waarde | 85 | 64 | 81 | 90 | 33 | 88 | 81 | 49 |

### Tabel 11 – VWO A12-bezem

| opgave | Marathon-loopsters | | | Stoppen met roken | | | | | Contributie | | | | Klokken | | | | | Inkomen | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| vraagnr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| max. score | 3 | 3 | 5 | 4 | 4 | 4 | 6 | 4 | 3 | 3 | 6 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 4 | 5 | 4 | 6 |
| p'-waarde | 99 | 91 | 53 | 90 | 47 | 68 | 27 | 37 | 86 | 74 | 69 | 33 | 71 | 51 | 95 | 42 | 13 | 51 | 54 | 43 |

### Tabel 12 – VWO overlap A – A12-bezem

| | opgave | Marathon-loopsters | | | Stoppen met roken | | | | | Inkomen | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | max.score | 3 | 3 | 5 | 4 | 4 | 4 | 6 | 4 | 5 | 4 | 6 |
| A | vraagnr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 14 | 15 | 16 |
| | p'-waarde | 97 | 91 | 71 | 88 | 56 | 81 | 40 | 49 | 59 | 67 | 46 |
| A12-bezem | vraagnr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 18 | 19 | 20 |
| | p'-waarde | 99 | 91 | 53 | 90 | 47 | 68 | 27 | 37 | 51 | 54 | 43 |

### Tabel 13 – VWO B 2010

| opgave | Gelijke oppervlakten | | | Onderzetter | | | | | Aan een cirkel… | | Conden-satoren | | | Een rechthoek in stukken | | Logarit-men… | Een geodrie-hoek | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| vraagnr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| max. score | 4 | 6 | 5 | 3 | 4 | 5 | 5 | 4 | 4 | 5 | 3 | 6 | 6 | 5 | 5 | 6 | 4 | 4 |
| p'-waarde | 81 | 60 | 52 | 78 | 38 | 57 | 51 | 50 | 67 | 36 | 67 | 71 | 62 | 67 | 65 | 61 | 74 | 33 |

# Amerika schat continu en China geeft discreet uit

## VERSLAG VAN DE EXAMENBESPREKINGEN EN HET EXAMENFORUM

[ Erik Korthof ]

Meer dan 200 collega's hebben dit jaar, verspreid over het land en over de verschillende wiskundevakken, deelgenomen aan de regionale examenbesprekingen. Dat aantal had hoger kunnen zijn, want in vijf plaatsen is de regiobespreking niet doorgegaan omdat er geen gespreksleider beschikbaar was. Ook waren er, vanwege het Pinksterweekeinde, geen vmbo-regiobesprekingen. De nieuwe vwo-programma's kregen dit jaar de examen-vuurdoop en stonden dus vooral in de belangstelling. Vwo A voldeed niet aan de verwachtingen, waarover later meer.
In het Examenforum werden opmerkingen gemaakt als 'Wat mij betreft mag er ook een reactie naar de samenstellers van het CE' en 'Een reactie van het CvE op onze opmerkingen zou ook passend zijn.' Het is goed om ons te realiseren dat er van elke regionale besprekingen een verslag wordt gemaakt en er een enquête wordt gehouden. Dit materiaal komt ter beschikking van het Cito en van het College voor Examens. Ook de bijdragen aan het Examenforum gaan niet ongemerkt aan deze instanties voorbij. Cito- en CvE-medewerkers gebruiken dit materiaal bij hun eerste evaluatie van de examens en het bepalen van de N-term. Een reden te meer om toch vooral mee te doen aan de regionale besprekingen, want van uw opmerkingen daar wordt nota genomen!

### VMBO

Dit jaar was er alleen een centrale bespreking, die open stond voor elke vmbo-wiskundedocent, en verder werd er een *quick scan* gehouden onder 1322 GL/TL-docenten. Die waren in meerderheid van mening dat het GL/TL-examen niet te moeilijk en ook niet te gemakkelijk was, een kwart vond het examen aan de gemakkelijke kant. De lengte van het examen was voor 92% precies goed en de inhoudelijke aansluiting op het onderwijs was voor 87% voldoende tot goed. Het examen kreeg voor de meeste docenten het cijfer 7, de gemiddelde waardering was 6,85. Dat geeft een beeld van tevredenheid en de 'ernst' van de aan de orde gestelde problemen in het Examenforum bevestigden dat beeld. De N-term bij KB was 0,7 en die bij GL/TL was 0,4 waarmee het enquêtebeeld bevestigd werd.
De deelname aan het Examenforum was bij KB-docenten gering, bij GT-docenten groter en geanimeerder. Over vrijwel elke GT-vraag werd wel de hulp van collega's ingeroepen bij het interpreteren en waarderen van wat sommige leerlingen aan afwijkende antwoorden opgevoerd hadden.
Opvallend is de steeds terugkerende discussie over de regel in het CV: 'Als in een berekening een notatiefout is gemaakt en als gezien kan worden dat de kandidaat juist gerekend heeft, wordt hiervoor geen scorepunt afgetrokken'. Wanneer is een notatiefout nog een notatiefout en wanneer wordt het een inzichtfout of nog erger? Is tan(0,2) = 11,3 graden nog te accepteren? En wat moet je met zoiets als 100 : 500 = *shift tan* = 11 graden? Hoewel niet altijd van harte wordt in het vmbo het 'breien' als een notatiefout op het examen door de vingers gezien.
Naast deze problematiek leverde bij GL/TL de opgave *Konijneneiland* vraag 21 (***zie figuur 1 op pag. 22***) over hoeveel konijnen er na een groot aantal jaren nog zouden zijn, de nodige discussie op. In de inleiding staat dat dat aantal na een groot aantal jaren constant blijft. Voor sommige leerlingen was dat grote aantal jaren een struikelblok, want de opgave beperkt zich tot een tijdspanne van zo'n 10 jaar. Was het vanuit de context nog wel realistisch om dan $t = 51$ of hoger te kiezen? Of was het voor leerlingen duidelijk genoeg dat er een wiskundige benadering van de formule werd verwacht los van de context?

**Afrondprobleem (1)**

KB-leerlingen moesten bij de opgave *Pitabrood* in vraag 1 (***zie figuur 2a op pag. 5***) laten zien dat de oppervlakte van de bakplaat voor het grootste pitabrood ter wereld afgerond 28,3 m² was. Het CV verwachtte dat bij beantwoording van deze vraag eerst de tussenstap 28,27… genoteerd zou worden, kennelijk om daarmee het afrondproces duidelijk te maken. Menig docent worstelde nu met het probleem dat een leerling meteen na de berekening $\pi \times 3^2$ het afgeronde antwoord gaf. De vraag op het forum was dan ook: Gaat het om de berekening of (ook) om het afrondproces? Ik constateerde tot mijn genoegen het gebruik van de puntjes bij onafgeronde tussenwaarden: wanneer zien we dat ook eens bij havo en vwo?
Een fenomeen dat bij vwo nieuw was, blijkt al langer bij het vmbo te bestaan: een formuleoverzicht bij het examen, hier met formules voor omtrek, oppervlakte en inhoud. Wanneer zal havo (en dan vooral wiskunde B) volgen met een adequate set formules bij het examen?
Tot slot: die vmbo-examens lijken me prima materiaal om in 3-havo te gebruiken, bijvoorbeeld als diagnostische toets bij de vakkenkeuze. Ze gaan hier en daar net iets verder dan het niveau in 3-havo en dat lijkt me prima indicaties op te leveren voor het kunnen van leerlingen.

### HAVO A

Allereerst wil ik opmerken dat in het verslag van de centrale normbespreking een viertal algemene correctieadviezen staan, o.a. over tussentijds afronden, notatie bij kansrekening en het gebruik van een GR-tabel bij beantwoording van een vraag (het zogenoemde inklemmen), die erg duidelijk en behulpzaam kunnen zijn bij het nakijken en mijns inziens eigenlijk een officiële status zouden mogen krijgen. Bijvoorbeeld de uitspraak 'Als in een antwoord tussentijds te vroeg wordt afgerond waardoor het eindantwoord verschilt van de norm: 1 punt aftrek' lijkt me een regel waarnaar vele collega's snakken. Er wordt al enkele jaren op, althans een paar van, deze punten een verwachtende blik richting CvE geworpen.

De enquête tijdens de regiobesprekingen leverde geen schokkende resultaten op. Eenderde vond het niveau te laag, de rest was er tevreden mee. Tweederde vond het niveau lager dan vorig jaar. Over de spreiding van de stof, het aantal routinevragen en het aantal originele vragen was een duidelijke consensus: goed, zo! De helft van de docenten vond het aantal vragen met algebra te klein, maar over de startopgave, het CV, de leesbaarheid en de omvang was men het weer positief met elkaar eens. De N-term 0,5 lijkt dus niet onverwacht.
De collega's in Amersfoort wijzen op het openbaar zijn van het CV, dus daar mogen geen storende notaties in staan, zoals 77/127 = 0,61. Daar moeten dan golfjes gebruikt worden. Die kent het CV overigens niet. Men voegt tussen haakjes (ongeveer) toe om een benadering duidelijk te maken. Zowel in het forum als tijdens de regiobesprekingen kwam de dubbele vraag in vraag 5 ('maak een schema' én 'bereken de kans') aan de orde: veel leerlingen bleken het tweede gedeelte van de vraag niet beantwoord te hebben. Die dubbele vraag leverde in het Examenforum overigens niet alleen tegenstanders op: zoiets moet een havoleerling toch eigenlijk best aan kunnen? Ook was men niet blij met vraag 23, waar de leerlingen de opdrachten kregen om 'met de GR' iets te onderzoeken, want, tja, wat is nou een GR? Er waren leerlingen die 'geen idee' hadden en dus het antwoord op de gestelde vraag schuldig bleven. In Rotterdam merkte men op dat de spoeling van de stof waarover vragen gesteld mogen worden, wel dun wordt (veel kansrekening): 'We maken ons zorgen over de examens na 2014, met nog minder onderwerpen.'

**Discreet of continu**

In het Examenforum werd een record gebroken wat betreft het aantal reacties op de topic over vraag 8 van het examen havo A. De opgave *China's defensie-uitgaven* waarvan die vraag een onderdeel was, staat in ***figuur 4 op pag. 6*** De grafiek lijkt een lijndiagram te zijn, hoewel de aanduiding 'tijd' langs de horizontale as volgens mij dan beter 'jaar' had kunnen zijn. Maar veel leerlingen, en met of namens hen ook collega's, interpreteerden de weergave van de hoge en lage schatting van de werkelijke uitgaven als continue grafieken (hoewel de jaartallen langs de horizontale as daar niet voor pleitten). Immers, zo vinden zij: zulke schattingen zullen vast en zeker dagelijks gemaakt en bijgesteld worden; die Amerikanen kunnen dat wel! De bedoeling was dat de vraag discreet opgelost zou worden, bijvoorbeeld door met een tabel de verschillen tussen de schattingen in opeenvolgende jaren na te lopen totdat je over de 50 miljard zit. Dat leverde het jaar 2011 op. Maar veel leerlingen losten met de GR via *Intersect* een vergelijking op en kwamen op, bijvoorbeeld, 'vanaf $t = 5{,}3$' en concludeerden 'dus' dat dat in de loop van 2010 is. De meningsverschillen liepen hoog op.
Het begrip 'lijndiagram' staat niet in de nomenclatuurlijst (maar wordt natuurlijk wel in alle boeken behandeld) en in Subdomein D2 (punt 12), dat niet onder het CE valt, staat: 'De kandidaat kan… een gegeven grafische (statistische) representatie interpreteren'. Tja, waar ligt de grens CE/SE? Een flink aantal collega's was het met elkaar eens dat er uit de grafiek en de context niet duidelijk en eenduidig was af te leiden dat de gegevens betrekking hebben op een discreet proces, zeker niet voor een leerling. Een betere toelichting bij de grafiek of een grafiek met losse punten, dan wel een samengesteld staafdiagram, en een duidelijkere tekst ('jaarlijkse' schattingen) had dit kunnen voorkomen, en zoals een forumdeelnemer opmerkte: 'de oorzaak is dat in het programma, in de leerboeken en soms ook in de eindexamens onvoldoende aandacht wordt besteed aan het verschil tussen discrete en continue processen en variabelen.'
Overigens, het CvE reageerde op de heftige commotie voorlopig met de woorden: 'Over de Chinese defensie-uitgaven: kandidaten kunnen uit de context opmaken wat in het lijndiagram wordt weergegeven, namelijk jaarlijkse uitgaven. De opgave is daarmee zonder misverstanden maakbaar.' En dát leverde ook weer een stroom van kritiek op. Het ging maar om 1 punt, maar met 72 reacties liep de discussie hoog op.
Het breien, en wat pregnanter is, het verschillend omgaan en waarderen van brei-fouten kwam weer uitgebreid aan bod in het forum. Hopelijk verschaft het CvE daarover meer duidelijkheid, maar dat lijkt pas 2012 te worden (zie de paragraaf HAVO B).

**HAVO B**

Als uit de halvering van het aantal topics en reacties in het Examenforum geconcludeerd zou worden dat de 'rust' na het frustrerende examen van 2009 wat teruggekeerd is, dan is dat maar schijn. Het examen zelf werd uitgebreid besproken met als kwalificaties in het forum: onevenwichtig, lastig, moeilijk, vreemd, leek soms meer natuurkunde, frustrerend, te veel tekst, zo wordt wiskunde B de nek omgedraaid, en: veel vragen niet begrepen door de vele tekst. Een N-term van 1,5 maakt wel duidelijk dat het geen 'loos alarm' was.
Uitschieter in het forum was vraag 5 van *Tetraëder van Bottrop* (een exacte berekening in een 30-60-90-driehoek; ***zie figuur 2***) met discussie over het waarderen van (natuurlijk weer) niet-exacte berekeningen, verschillende onuitgewerkte wortelvormen die op hetzelfde antwoord neerkomen, gebruik van de zwaartelijnstelling (die niet meer tot de stof behoort) en de vorm 30/cos(30°) als mogelijk exact (eind)antwoord. Tijdens de regiobesprekingen werd opgemerkt dat de exacte waarden zoals van cos(30°) niet in de eindtermen staan. Er wordt in de syllabus echter wel verwezen naar de klassieke exacte waarden van goniometrische verhoudingen van de bekende hoeken in het hoofdstuk 'Algebraïsche kennis, vaardigheid en inzicht'.
De deelname aan de regiobesprekingen lag, met één regiobespreking minder dan vorig jaar, bijna op hetzelfde niveau als in 2009, maar dat verschilde plaatselijk. Men vroeg zich bij diverse besprekingen af of de wiskundemethodes wel voldoende aansluiten bij deze examens. Ook werd gewezen op het grote verschil tussen wisA en wisB, wat niet stimulerend is voor de keuze van wisB.

**Afrondprobleem (2)**

Bij vraag 10 werd over de *Archimedes Wave Swing* (om de golfbeweging van de zee te gebruiken om energie op te wekken) gevraagd te onderzoeken vanaf welke amplitude van de golfbeweging de AWS-drijver af en toe boven water verschijnt: 'Rond je antwoord in meter af op één decimaal.' Heel precieze leerlingen vonden dat dat bij een amplitude van 1,93 nog niet het geval was en bij 1,94 wel, dus het antwoord, afgerond op één decimaal is 1,9 meter. Anderen onderzochten amplitudes op één decimaal, en dan bleek 1,9 niet te voldoen maar 2,0 wel. Een qua formulering vervelende vraag dus. Volgens het CV moest niet het antwoord dat gevonden is

worden afgerond, maar moet een onderzoek gedaan worden met amplitudes in meter op één decimaal en is dus alleen 2,0 meter goed. De vraagstelling leverde zowel op de regiovergaderingen als in het forum terecht kritiek op. 'Wanneer wordt wiskunde B weer wiskunde B: het lijkt wel een examen tekstverklaren!', verzucht iemand in het forum.
De enquête. Het niveau werd algemeen te hoog bevonden (82%), de spreiding nauwelijks voldoende en het aantal routinevragen eerder te klein dan goed. Het aantal 'originele' vragen was te groot, waarbij Den Haag zich afvroeg of 'origineel' een negatieve of positieve kwalificatie is. De keuze van de startopgave *Diersoorten* leverde van slecht naar goed 45% / 12% / 63% op. Den Haag geeft wellicht de verklaring: vraag 1 was als startopgave okay, maar de startopgave *Diersoorten* in z'n geheel komt niet verder dan hoogstens 'matig' wegens de voor de leerlingen onbekende vraagsteling in vraag 2 en de niet erg gewaardeerde redeneervraag 4. En vraag 3 was volgens Amsterdam ook nog eens 'dramatisch' gemaakt. Het CV was voor de meerderheid (71%) goed hanteerbaar, de rest wilde wel meer details. De leesbaarheid van het examen werd vrijwel unaniem als 'slecht' gekwalificeerd. De opgave over de *Archimedes Wave Swing* gold daarbij als negatief voorbeeld. De taligheid van de vragen baart duidelijk zorgen bij de docenten. 'Liever wat extra sommetjes', vindt Den Haag. De omvang vond men fifty-fifty 'goed' tot 'te groot'.
Enkele praktische opmerkingen uit de regio: het woordje EINDE staat wel erg klein afgedrukt, terwijl er op de laatste examenpagina nog best even een keer kan worden neergezet: VERGEET NIET JE BIJLAGE IN TE LEVEREN. Die opmerkingen klonken ook bij andere wiskundevakken.
Het zou handig zijn als er een soort consensus ontstaat waarbij je allemaal hetzelfde type fout op dezelfde manier beoordeelt. Breien is bijvoorbeeld een aardige… Het CvE heeft laten weten: 'Wat het breien betreft: op dit moment komen wij niet met aanvullende regels. Wij zullen overwegen of bij de algemene correctieregels in 2012 hierover een opmerking gewenst is, met welke strekking dan ook.'

**VWO A**

Met spanning werd uitgekeken naar het eerste nieuwe examen vwo wiskunde A. Het blijkt wat minder uit de regiobesprekingen, maar op het forum des te meer: er is sprake van teleurstelling. Veel collega's voelden zich op het verkeerde been gezet door dit examen, omdat ze de afgelopen jaren veel tijd en energie gestopt hadden in de algebraïsche vaardigheden die in de syllabus met de nodige tamtam aan de orde worden gesteld. Er was geen enkele keer te lezen 'los op algebraïsche wijze op'.
Van de opgave *Inkomen* haalde vraag 14, waar de opdracht was om tussen twee gegeven waarden lineair te interpoleren (***zie figuur 3***), mede dankzij het LAKS, de landelijke pers, omdat het begrip 'lineair interpoleren' geen examenonderwerp is! Het wordt niet in de nomenclatuurlijst of de syllabus genoemd of in de boeken behandeld; dit in tegenstelling tot havo A. De voorlopige reactie van het CvE: 'De eindtermen zijn niet een complete begrippenlijst en we gaan ervan uit dat leerlingen zo'n begrip kennen, en als ze het niet paraat hebben, wel kunnen duiden en hanteren. Of de opgave moeilijker is dan beoogd, zal de toetsanalyse moeten uitwijzen.' De N-term 0,7 lijkt er niet meteen op te wijzen dat de opgave zo slecht gemaakt is dat daar rekening mee gehouden moest worden.

**Getallenvoorbeeld…**

Ook *Boomgroei* vraag 13: 'Beredeneer, dus zonder getallenvoorbeelden te gebruiken, dat alle grafieken door de oorsprong gaan' ontlokte vele protesten, want het was de bedoeling dat de leerling de waarde $t = 0$ in de formule $h = a(1 - b^t)^c$ invulde, waardoor $h$, onafhankelijk van de andere variabelen in de formule, 0 werd. Het ging over de hoogte van zomereiken, en vrijwel iedere leerling wrong zich verbaal in biologische bochten om duidelijk te maken dat de grafiekenbundel door de oorspong zou gaan, maar vermeed dus angstvallig het invullen van $t = 0$; dat was voor haar of zijn gevoel een getallenvoorbeeld.
Er was in drie andere vragen wél een verbale redenering nodig en dat was, vond men, toch wel wat te veel van het goede. Hoewel het een expliciete vaardigheid betreft, zijn de meeste collega's nooit blij met zulke vragen want het corrigeren, en later het overleg met de tweede corrector, kost vaak hoofdbrekens, omdat leerlingen slecht redeneren, maar nog slechter formuleren. Uit de enquête blijkt dat bijna de helft van de bezoekers van de regionale besprekingen het niveau goed vonden, maar de grote minderheid vond het te laag en 62% vond het lager dan vorig jaar. Ook de spreiding van de stof kreeg een onvoldoende, het aantal originele vragen zat meer in de plus, het aantal routinevragen juist meer in de min en 92% vond het aantal vragen met algebraïsche vaardigheden te klein.
De startopgave, het CV en de leesbaarheid leverden een positief beeld. Tweederde vond de omvang goed, de rest vond het te veel. Opvallend: er is nauwelijks een opmerking gemaakt over het in het examen afgedrukte formuleblad en de functionaliteit ervan, ook bij wiskunde C niet. Bij wiskunde B is de mening daarover in de enquête gepeild.
In Amsterdam werd geconstateerd: het CV geeft aan dat bij achterwege laten van de continuïteitscorrectie geen puntenaftrek dient plaats te vinden. Dit zou een signaal aan docenten en leerlingen kunnen zijn om daar dan geen aandacht aan te geven. Het CV mag daar best iets strenger zijn.

**VWO B**

Na de storm die het CE havo B vorig jaar veroorzaakte, was het toch wel spannend hoe het dit jaar met vwo B zou gaan. Uit de enquête blijkt dat het een redelijk geslaagd examen is geworden: 86% was tevreden over het niveau en het aantal routinevragen en originele vragen kon er ook prima mee door. De spreiding van de stof leverde een gevarieerder beeld: 32% 'slecht', 53% 'voldoende' en de rest 'goed'. Het aantal vragen met GR was goed en de functionaliteit van het formuleblad vond men voldoende tot goed. Een ruime meerderheid vond het aantal vragen met algebra goed. De startopgave werd matig tot slecht bevonden. Het CV en de leesbaarheid kregen een positief onthaal. 74% vond de omvang te groot. In alle regioverslagen komt toch wel het geworstel met meetkundige bewijsopgaven zoals bij vragen 10, 17 en 18 naar voren.
De N-term 1,1 is niet zo schokkend, maar die van het bezemexamen B12 (we laten de bezemexamens in dit artikel verder buiten beschouwing) was dat wel: met 2,8 één van de hoogste ooit!
De collega's in Rotterdam zouden het prettig vinden als er meer duidelijkheid over puntenaftrek met betrekking tot notatie zou zijn, bijvoorbeeld het vergeten van $dx$ bij integralen. Vanuit Den Haag komt het

advies om in het CV duidelijk te maken waar gesprokkeld/gestapeld mag worden.

**Een exact antwoord**

Bij wiskunde B werd minder gebruik gemaakt van het forum dan vorig jaar. Er sprong één vraag duidelijk uit, namelijk bij de *Onderzetter* vraag 5, waarop 54 reacties kwamen. De vraag staat ***in figuur 2 op pag. 36*** het bijbehorende correctievoorschrift in ***figuur 4***. Een aantal leerlingen kwam met een antwoord aanzetten in de vorm $6 \cdot \sin(\cos^{-1}(8/10))$ of ook $6 \cdot \sin(\arccos(8/10))$, en sommigen van hen schreven daarachter zonder meer '= 3,6'. Dat laatste kan dan niet anders dan met de rekenmachine bepaald zijn en dat is niet erg exact meer: als je opschrijft $\sin(\cos^{-1}(8/10))$ dan is dat ook in feite rekenmachinetaal. Maar in hoeverre is $6 \cdot \sin(\cos^{-1}(8/10))$ of $6 \cdot \sin(\arccos(8/10))$, en dan zonder '= 3,6' erachter, als eindantwoord op zichzelf nog exact? Er bleken veel collega's voor te voelen om hiervoor 3 van de 4 punten te geven. Ik moet echter het eerste boek nog zien waar zo'n resultaat als een legitiem exact antwoord op een dergelijk probleem wordt gepresenteerd. Andere collega's kwamen op grond van het CV niet verder dan 1 punt. Tot een consensus kwam het in het forum niet, de ene rekent fout wat de ander nog goed rekent, een verschil van 2 punten. Waar eindigen vakinhoudelijke argumenten en begint het binnenhalen van nog zoveel mogelijk punten?
In dit verband werd nog opgemerkt dat de laatste generaties (grafische) rekenmachines dankzij de *natural display* de uitvoer bedrieglijk 'exact' lijken te weer te geven: bij invoer van $\sin(\cos^{-1}(8/10))$ wordt keurig de breuk 3/5 zichtbaar in plaats van de decimale vorm. De rekenmachines kunnen steeds vaker meer dan we zouden willen! [Zie hiervoor ook het artikel van Biesheuvel en Dominguez in dit nummer; Red.]
Wat ook nog in het Examenforum ter sprake kwam was de opdracht 'teken' in verband met opgave 9 over *Aan een cirkel rakende rechthoeken*. Mag je dan nog verwachten dat leerlingen echt gaan construeren, of iets minder, hun passer adequaat inzetten? Of is dan bijvoorbeeld schuiven met de geodriehoek om punten op afstand te tekenen, evenwijdige lijnen te krijgen of raaklijnen te vinden ook goed? Ik denk dat vele collega's in de les nog wel iets van het construeren, zoals dat vroeger gebeurde, aan de man proberen te brengen, maar het is geen 'nomenclatuur' meer. Het CV verwacht hier wel cirkels, maar stelt geen nadere eisen bij bijvoorbeeld het tekenen van middelloodlijnen. En dan komt inderdaad de vraag om de hoek zetten: wanneer is een tekening nog netjes en acceptabel genoeg om voor de punten in aanmerking te komen? Is dat als de toelichting duidelijk genoeg is, of als er tekentjes voor evenwijdig, loodrecht en even lang in de tekening staan?

**VWO C**

Een 'nieuw' vak, hoewel het nieuwe er qua examen wel een beetje afging toen duidelijk werd dat het examen vwo wiskunde C en het bezemexamen vwo wiskunde A1 hetzelfde zouden zijn. Wat voor conclusie je daaruit kon trekken? In ieder geval, dat de onderwerpen die niet bij wiskunde C voorkomen, dus ook niet aan A1-kandidaten gevraagd zouden worden en andersom. Dat scheelt. En heel misschien, een eerste én een laatste examen: dan is voorzichtigheid bij de examenmakers misschien wel troef.
De enquête laat wat betreft het niveau een tevreden beeld zien, ten opzichte van het A1-examen van 2009 vond men het niveau lager. De spreiding, het aantal originele en het aantal routinevragen was okay, en ook bij wiskunde C had men meer algebra verwacht. Over de startopgave werd zeer verschillend gedacht, meestal in ongunstige zin, maar het CV, de leesbaarheid en de omvang konden de goedkeuring wegdragen. Interessant: het niveauverschil tussen wiskunde C en A vond 73% goed, 23% te gering. De N-term van 0,8 lijkt aan te geven dat ook de leerlingen met het examen wel overweg konden.
Een deel van het C-examen kwam overeen met het examen wiskunde A, namelijk 8 van de 20 vragen, en daaronder was ook de vraag 'zonder getallenvoorbeeld' (zie de paragraaf VWO A); bij C was dat vraag 6. Ook bij wiskunde C ging dit de mist in en was veel kritiek op de vraagstelling. Vraag 14 van de opgave *Schoonheidssalons* had nooit zo gesteld mogen worden, zo vond Amsterdam. Het gaat over één figuur met grafieken ten opzichte van twee verschillende verticale assen, aan de ene kant is het totale aantal schoonheidssalon (× 1000) uitgezet, aan de andere kant het aantal schoonheidssalons per 25000 inwoners (***zie figuur 5***). De leerlingen mogen zich proberen voor te stellen hoe dat er uit zou zien in een assenstelsel 'met één verticale as': lopen de grafieken dan nog steeds ongeveer evenwijdig? Ook op het Examenforum werd deze vraag niet met gejuich begroet. Moeilijk na te kijken geredeneer, maar meestal niet begrepen door de leerlingen. En ook (weer): docenten en leerlingen waren gespitst op algebraïsche vaardigheden en dan sluit de veelheid van redeneervragen daar niet op aan. Afgezien van de vragen 6 en 14 waren er geen topics in het Examenforum wiskunde C die veel reactie of opwinding opleverden. Het bleef bij wederzijdse vragen en adviezen ten aanzien van door leerlingen genoteerde minder geslaagde antwoordpogingen.

**Examenforum 'achter de login'**

In het Examenforum werden ruim 150 topics geopend en die leverden samen meer dan 1000 reacties op. De aantallen zijn dus teruggelopen, maar dat komt ook omdat het aantal examens iets kleiner geworden is en de reacties op de nieuwe examens vorig jaar bij havo veel heftiger waren dan nu bij vwo. Er is nauwelijks kritiek geweest op de inlog-maatregel. Een enkeling beklaagde zich over het feit dat hij zijn examenresultaten nu niet anoniem kon publiceren, maar anderen hebben daar geen probleem mee, zo toont het forum. Een positieve bijkomstigheid was de grote stroom nieuwe leden die zich aanmeldden om gebruik te kunnen maken van het Examenforum. En aan de andere kant zijn de webmasters enige tijd zeer druk geweest om dagelijks tientallen leden te voorzien van de juiste inloggegevens.
Het bestuursbesluit om het Examenforum 'achter de login' te plaatsen zal worden geëvalueerd en de uitslag daarvan krijgt u ongetwijfeld te horen of te lezen.

**Over de auteur**

Erik Korthof is een van de webmasters van de NVvW-websie en was vóór zijn fpu docent wiskunde Tweede fase aan het Bonhoeffer College te Enschede.
E-mailadres: *eskorthof.1@kpnmail.nl*
Reacties op dit artikel kunnen geplaatst worden in het forum 'Lezersreactie EUCLIDES' op *www.nvvw.nl* .

Er is een formule opgesteld die zo goed mogelijk past bij de grafiek:

$K = 2000 - 1980 \times 0{,}85^t$

Hierin is $K$ het aantal konijnen, $t$ is in jaren met $t = 0$ in april 1995.

figuur 1 Uit: VMBO-GL/TL 2010 (Konijneneiland)

Een regelmatige tetraëder is een viervlak waarvan de vier grensvlakken de vorm van een gelijkzijdige driehoek hebben. In figuur 1 is een bovenaanzicht van de regelmatige tetraëder $ABC.T$ te zien. Hierin is $ABC$ het grondvlak en $T$ de top. Er geldt: $AB = 60$.

**figuur 1**




De lengte van $CT$ in het bovenaanzicht van figuur 1 is ongeveer 35.

- Bereken exact de lengte van $CT$ in het bovenaanzicht van figuur 1.

figuur 2 Uit: HAVO-B 2010 (Tetraëder van Bottrop)

Het CBS (Centraal Bureau voor de Statistiek) besteedt elk jaar aandacht aan de verdeling van de inkomens van huishoudens in Nederland. In tabel 1 is voor het jaar 2004 weergegeven hoeveel huishoudens in een bepaalde inkomensklasse zaten.

**tabel 1**

| besteedbaar inkomen in euro's | aantal huishoudens in duizendtallen |
|---|---|
| 0 – 10 000 | 490 |
| 10 000 – 20 000 | 2057 |
| 20 000 – 30 000 | 1777 |
| 30 000 – 40 000 | 1309 |
| 40 000 – 50 000 | 687 |
| 50 000 – 70 000 | 460 |
| meer dan 70 000 | 197 |

Met behulp van lineair interpoleren kun je een schatting maken van het percentage huishoudens met een besteedbaar inkomen van ten hoogste 27 000 euro.

- Schat dat percentage huishoudens met behulp van lineair interpoleren.

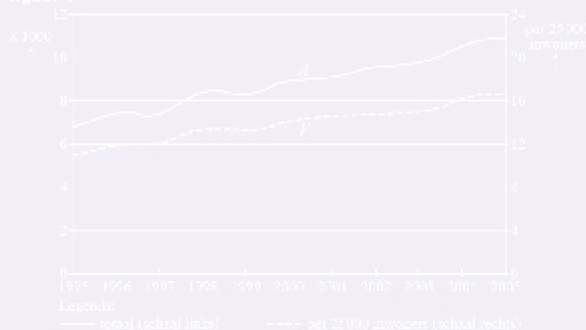
figuur 3 Uit: VWO-A 2010 (Inkomen)

5 **maximumscore 4**

- Als $f = 8$ dan $\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{4}{5}$ 1
- $\sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right) + \cos^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = 1$ 1
- Hieruit volgt (omdat $0 < \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\pi$) $\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{3}{5}$ 1
- $b = 6 \cdot \frac{3}{5} = 3\frac{3}{5}$ 1

figuur 4 Uit: Correctievoorschrift VWO-B 2010 (Onderzetter)

**figuur 1**

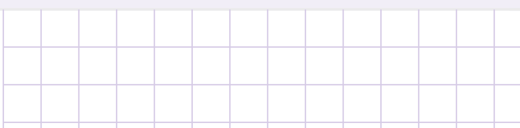



De grafieken in figuur 1 kunnen zonder veel verlies van informatie door rechte lijnen vervangen worden. De lijnen van $A$ en $V$ lopen ongeveer evenwijdig. Dat kan het gevolg zijn van het gebruik van twee verschillende verticale assen in de figuur.
Het is de vraag of de grafieken nog steeds (ongeveer) evenwijdig zijn wanneer we deze tekenen in een assenstelsel met één verticale as voor beide grafieken.

- Onderzoek of dat inderdaad het geval is. Motiveer je antwoord.

figuur 5 Uit: VWO-C 2010 (Schoonheidssalons)





# Collegiaal overleg rond de VMBO-examens

## OP DE OPEN SCHOOLGEMEENSCHAP BIJLMER

[ Klaske Blom ]

Hoewel de OSB, de Open Schoolgemeenschap Bijlmer, bekend staat als een school waar de gezamenlijke aandacht vooral uitgaat naar een sterk pedagogisch klimaat, is de laatste jaren een duidelijke koersverandering zichtbaar: ook voor vakontwikkeling wordt veel tijd gereserveerd en vakcollega's zoeken de samenwerking in vakgroepen. De wiskunde vmbo-vakgroep heeft het afgelopen schooljaar veel tijd besteed aan het opstellen van een vakwerkplan én kende een intensief overleg over toetsen, correctievoorschriften en interpretatie van leerlingenwerk tijdens de school- en landelijke examens. In dit artikel wil ik u laten zien hoe dat in zijn werk ging na het centrale examen in 2010.

### De aanloop

In de aanloop naar het examen wordt er, nog meer dan anders, hard gewerkt door leerlingen en docenten. In het PTA van de 4e klas staat dat alle tussentoetsen voldoende gemaakt moeten worden. Natuurlijk doen leerlingen dat niet altijd. Toch moeten ze voldoen aan dat handelingsdeel omdat er anders geen diploma gehaald kan worden. De oplossingen om leerlingen toch hun handelingsdeel voldoende te laten afsluiten zijn per docent verschillend, maar in grote lijnen komt het er op neer dat leerlingen een herkansing van een tussentoets moeten maken (in eigen tijd), nadat ze ter voorbereiding geoefend hebben met extra opgaven. Leerlingen worden op deze manier gedwongen hun werk constant en op voldoende niveau bij te houden. Een enkele docent organiseert de herkansingen aan het eind van het schooljaar, zodat stof die onvoldoende wordt beheerst voor het CE nog eens extra voorbijkomt.
Een ander instrument tot het verhogen van de kwaliteit van de werkhouding van leerlingen is het controleren van huiswerk en schriften en het snel contact opnemen met ouders als een kind op school onvoldoende betrokken is en zijn werk verwaarloost. En tenslotte zijn daar de examentrainingen: desnoods in de meivakantie, op vrijwillige – maar eenmaal opgegeven, wel verplichte – basis.

### Collegiale ondersteuning

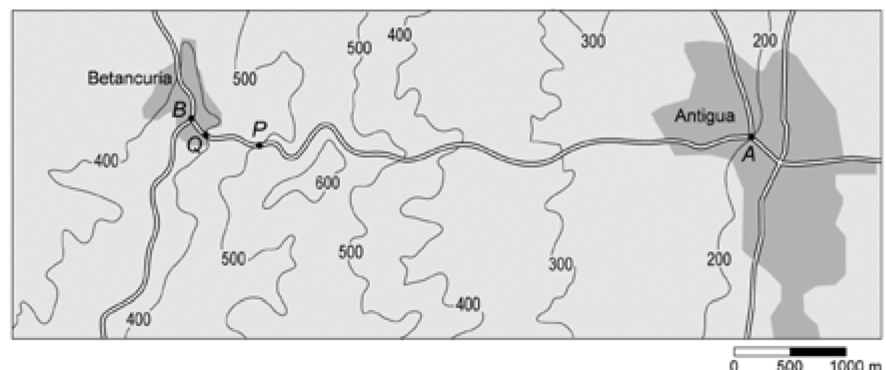
De sectie kent een traditie van een zeer intensieve bespreking van de ervaringen met het centrale examen Allereerst is daar, op de dag van het examen, de nazit met thee, dropjes en koek: de eerste indrukken worden uitgewisseld. Elke vakdocent heeft bij een examen gesurveilleerd omdat op de OSB de vmbo 4-leerlingen examen doen in een gewoon lokaal, met hun mentor of een vakdocent als surveillant. Dit is een vertrouwde situatie waarin leerlingen eerder tot rust komen, als de stress hoog op dreigt te lopen, dan in een grote gymzaal. Leerlingen voelen zich vertrouwder met bekende gezichten van mentor en klasgenoten om zich heen.
Terug naar de vakgroep. Elke wiskundedocent heeft het examen kunnen lezen terwijl de leerlingen aan het werk waren:

- 'Alles wat gevraagd werd, is wel eens aan de orde geweest. Er was niets wat ze niet eerder gezien hadden. Ik ben er blij mee dat ik ze goed voorbereid heb, voor een eerste keer is dat een pak van mijn hart'.
- 'Ik vond het makkelijk, fantastisch dat er eindelijk eens fatsoenlijke rekengetallen gebruikt werden en geen vreselijke decimale getallen of breuken.'
- 'Iedereen heeft wel tot het eind zitten werken, ze hadden alle tijd nodig.'
- 'Voor kader-leerlingen vond ik het wel veel leeswerk en het examen legde nadruk op andere zaken dan ik zelf had gedaan. Zo'n uitvoerige opgave over doorsnede en hoogtelijnen…; dat had ik niet verwacht.'

Na deze eerste uitwisseling volgt grondige bestudering van de vragen en het bijbehorende correctievoorschrift.

***Van Betancuria naar Antigua***. Zie hiervoor ***figuur 1a*** en ***figuur 1b***. Veel leerlingen kenden het woord *hemelsbreed*

Gerrit en Jeannette zijn op vakantie op het eiland Fuerteventura.
Ze willen een wandeling gaan maken van Betancuria naar Antigua.
Hieronder zie je een kaart van het gebied met daarop de wandelweg van punt *B* naar punt *A*. Op de kaart staan hoogtelijnen getekend, met daarbij de hoogte in meters boven de zeespiegel aangegeven.



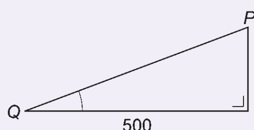

**6** Punt *B* ligt op 380 meter hoogte.
→ Hoeveel meter ligt punt *A* lager dan punt *B*? Leg je antwoord uit.

Uit: VMBO KB en GL/TL 2010 (Van Betancuria naar Antigua)

**8** De 5,5 km lange wandeling duurt 1 uur en 50 minuten.
→ Bereken de gemiddelde snelheid in kilometer per uur. Schrijf je berekening op.

**9** Hemelsbreed is de afstand van *B* naar *A* korter dan 5,5 km.
→ Bereken met behulp van de kaart op de uitwerkbijlage hoeveel kilometer de afstand van *B* naar *A* hemelsbreed is. Schrijf je berekening op.

**10** Het steilste stuk van de wandeling ligt tussen de punten *Q* en *P* (zie de kaart op de uitwerkbijlage) en is overal even steil. De horizontale afstand is 500 meter (zie de tekening hieronder).




→ Bereken hoeveel graden hellingshoek *Q* van het steilste stuk van de wandeling is. Schrijf je berekening op.

figuur 1b Uit: VMBO KB en GL/TL 2010 (Van Betancuria naar Antigua)

**14** Met Magnetic kan ook onderstaand ruimtefiguur worden gebouwd.




Op de uitwerkbijlage is een begin gemaakt met het tekenen van een model van het vooraanzicht van deze ruimtefiguur. Het midden van een knikker wordt voorgesteld door een punt. De afstand tussen twee punten is telkens 5 cm.
→ Teken op de uitwerkbijlage het vooraanzicht op dezelfde manier verder af.

figuur 2a Uit: VMBO KB en GL/TL 2010 (Magnetic)



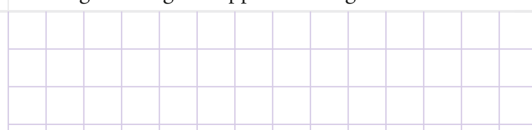
figuur 2b Uit de Uitwerkbijlage bij Magnetic (VMBO KB en GL/TL)

niet. Een gebrekkig vocabulaire is de laatste jaren wel vaker een probleem, vandaar ook de woordenboeken die ze mee mogen nemen. Echt nuttig? Of meer een doekje voor het bloeden?
En dan de leerlingen die 1 uur en 50 minuten hebben omgezet in 1,5 uur; ze zullen er vast zijn. Ze missen het eerste punt en daarna kan het gewoon verder goed gaan. Flauw en jammer dat er bij vraag 10 GL/TL (= vraag 16 KB) in de figuur geen derde letter vermeld stond… Het zou leerlingen geholpen hebben om meer structuur in de vraag aan te brengen.
***Magnetic***. Deze vraag lijkt een cadeautje, maar blijkt bij nadere bestudering toch nogal wat eisen aan de leesvaardigheid te stellen. Je kunt makkelijk in de war raken over staafjes en knikkers. Bij vraag 14 GL/TL (= vraag 16 KB), zie ***figuur 2a*** en ***figuur 2b***, moesten gelijkzijdige driehoeken worden getekend; dat heeft één van de collega's voorgedaan in de les, maar niet alle leerlingen hadden hun passer bij zich op het examen. Zorgdragen voor je eigen spullen, altijd alles bij je hebben; het zijn geen vanzelfsprekende talenten bij onze leerlingen. En als er dan geen passer is, wat dan? Hoeveel graden mag een hoek afwijken van 60 graden? Het staat niet in het correctievoorschrift. Er wordt flink gediscussieerd: elke driehoek moet 3 keer 60 graden laten zien, of passerlijnen; dat maakt het makkelijker corrigeren.
***Gevelvlag***. Een opgave met meer informatie in de gegevens dan nodig is om de vragen te maken. Sommigen vinden dat vervelend omdat er vast leerlingen zullen zijn die erdoor in de war raken. Anderen zien er de voordelen van: leerlingen worden gedwongen tot goed lezen en nadenken. Waarschijnlijk zal er veel 'geplakt en gebreid' worden; de vragen 'vragen er om'. Tot en met het schoolexamen wordt het afgestraft, maar op het CE volgen we de mores van het correctievoorschrift om breifouten te laten vallen onder acceptabele verschrijvingen.
***Stappenteller*** (alleen GL/TL). Dit lijkt een slechte binnenkomer te zijn geweest (***zie figuur 3***): leerlingen werden rood, je zag ze draaien en zuchten in het begin. Pas later kwam er rust tijdens het werken.
Geef een woordformule: heel pittig. Iemand merkt op dat in *Moderne wiskunde* (de methode die we op de OSB gebruiken) veel minder vanuit woordformules wordt gewerkt dan in *Getal & Ruimte* en *Netwerk*. Iedereen vreest dat deze vraag niet goed gemaakt zal worden. Wat als leerlingen de formule in centimeters geven? Sommige collega's neigen ernaar dat ook goed te vinden, maar in het correctievoorschrift staat heel duidelijk dat dat niet de bedoeling is. Wel flauw bij een formule die toch al zo moeilijk is: ook nog eens nadruk leggen op de eenheid! Na wat gemor zal iedereen zich toch achter het correctievoorschrift scharen.

Alle opgaven worden met elkaar doorgenomen en een volgende afspraak gemaakt: als iedereen het werk van zijn leerlingen gecorrigeerd heeft, is er weer een overlegmoment om ervaringen uit te wisselen en elkaar te helpen bij lastige situaties en beslissingen.

## Na het correctiewerk

Iedereen heeft het werk van zijn klassen nagekeken en de vakgroep komt weer bij elkaar. Waar zitten nog onduidelijkheden? Waar is elkaars hulp nodig? Eén van de collega's gaat na dit overleg naar de centrale bijeenkomst in Utrecht en zal alle twijfelpunten die overblijven, meenemen. Daarna zal de vakgroep nog een laatste keer bij elkaar komen voor een kort overleg over de 'lastige' correctiepunten.
De eerste indruk van het leerlingenwerk is dat de zwaarte van het examen meeviel. Het werk is gemaakt zoals bij de schoolexamens. Wel is te zien dat leerlingen moeite hebben om twee uur lang geconcentreerd te blijven werken. Aan het eind doen zich duidelijk vermoeidheidsverschijnselen voor; sommige leerlingen stoppen er ook gewoon



mee – helaas te vroeg… Iets anders dat opvalt is dat goede leerlingen profiteren van een relatief makkelijk examen: ze maken het ook echt goed, beter dan normaal. De zwakkere leerlingen maken het niet beter dan ze normaal doen, een wonderlijk verschijnsel.

Nog wat opmerkingen over bevindingen met de opgaven.
*Van Betancuria naar Antigua*, de wandeling door de bergen. De vraag over het tekenen van het deel van de route waar de wandeling over zijn hoogste punt kan gaan, blijkt een vraag te zijn die veel discussie losmaakt; wat betekent de vraag 'Waar kan dat hoogste punt liggen?' Moet je dan juist een ruimer gebied tekenen dan je op grond van gezond verstand zou doen? Natuurlijk is het hele gedeelte tussen de hoogtelijnen van 500 m correct, maar dat leerlingen maar een gedeelte tekenen ligt zo voor de hand. Een enkel kruisje levert niets op, logisch ook en toch… De indruk is wel dat een leerling die het zo doet, goed heeft nagedacht. 0 punten is zo weinig… Eén van de collega's is scherp tijdens het overleg: de tekst wordt nog eens gelezen, nadruk gelegd op 'een' en 'het'. De collega's hopen dat er na de centrale examenbespreking in Utrecht meer duidelijkheid zal komen. En dat komt er ook: 'Als een deel van de weg is gekleurd: 1 punt. Als er een kruisje of stip is geplaatst: 0 punten'. Gelukkig dan toch 1 punt voor een deel van de weg. Zo kan iedereen er mee leven.
En dan die vraag over het berekenen van de horizontale afstand met behulp van de tangens. Wat als leerlingen niet 100 als hoogte invullen, maar 500 en dan de rest goed doen? Eén van de collega's zou 1 punt aftrekken, een ander vindt het niet correct dat je nog zoveel punten kunt verdienen als het uitgangspunt niet begrepen is. Als je door een fout een veel makkelijkere vraag krijgt, wat dan? Moeten we hier verschillende strengheid in correctie toepassen tussen kader en theoretisch? Uit de centrale bespreking komt het idee om toch maar 1 punt af te trekken als het antwoord acceptabel is en geen punten toe te kennen als er een onzinnig antwoord uitkomt, zonder dat een leerling daarover iets opmerkt.
Kader en theoretisch examen ontlopen elkaar vooralsnog niet, maar bij de vraag over de stappenteller duidelijk wel: kaderleerlingen krijgen gegeven wat theoretische leerlingen zelf uit moeten zoeken.

Een stappenteller is een apparaat dat het aantal stappen van een persoon telt.



De staplengte is de afstand in centimeters die je gemiddeld met één stap aflegt.

1 Jeroen heeft een stappenteller. Volgens de stappenteller heeft hij 2754 stappen gezet van huis naar school. De afstand van zijn huis naar school is 1600 meter.
→ Bereken in hele centimeters de staplengte van Jeroen. Schrijf je berekening op.

Karel heeft een staplengte van 55 centimeter.

2 Karel maakt een wandeling van 1,5 uur.
→ Maak een schatting van het aantal stappen dat hij bij deze wandeling gezet heeft. Leg uit hoe je aan je antwoord gekomen bent.

3 Er is een verband tussen de *afgelegde afstand* in meters en het *aantal stappen* dat Karel zet.
→ Geef een woordformule voor dit verband.

figuur 3 Uit: VMBO GL/TL 2010 (Stappenteller)

*Stappenteller*. Veel leerlingen hebben een andere aanpak gekozen dan in de opgave gesuggereerd wordt. Ze hebben bijvoorbeeld gewerkt met het aantal stappen per seconde. Als de aanname goed is, leidt deze methode tot een goed antwoord. Als de aanname te ruim of te krap is, kom je niet in het antwoordgebied uit. Wat betekent dat dan voor de puntentoekenning? De collega's overleggen lang over deze vraag, worden het niet helemaal eens op inhoudelijke argumenten. Hier zien we dezelfde discussie terug die ook bij het corrigeren van het vwo-werk gevoerd werd: wat te doen met leerlingen die door hun antwoord blijk geven van goed inzicht en goed werk, maar die iets anders doen dan de bedoeling was. Het lijkt alsof hier toch door collega's de ruimte wordt genomen om naar eigen 'eer en geweten' te corrigeren en dit te verdedigen in een gesprek met de tweede corrector. Als een leerling inzichtelijk goed werkt, technisch goed werkt en zonder slordigheden, lijkt hij toch punten in de wacht te slepen.

**Op naar volgend jaar**

Na deze intensieve samenwerking lijkt iedereen tevreden. Het was plezierig om je te scherpen aan elkaar, om de opgaven en het correctievoorschrift nog een keer samen kritisch te lezen, om elkaar raad te kunnen vragen en geven over moeilijkheden in het leerlingenwerk en om van elkaars deskundigheid gebruik te kunnen maken.
Op grond van het CE kwam de vraag op tafel of er aanpassingen nodig zijn in didactiek en/of inhoud van het programma. Een van de aandachtspunten zal de lengte van de toetsen zijn: er moet een betere opbouw komen naar een toets van twee uur, waardoor leerlingen meer zitvlees krijgen.

Ik prijs me gelukkig dat ik in een vakgroep terechtgekomen ben waarin zo nauw samen gewerkt wordt en waarin met alle mogelijke zorgvuldigheid wordt omgegaan met examens. Het was mijn eerste jaar in het vmbo, ik had nog geen examenklas, maar meekijken vanaf de zijlijn was bijzonder inspirerend.

**Over de auteur**
Klaske Blom is docent aan de OSB, Open Schoolgemeenschap Bijlmer, in Amsterdam-Zuidoost. Daarnaast is ze hoofdredacteur van *Euclides*.
E-mailadres: *klaskeblom@gmail.com*

# Wat is er mis met het Centraal Examen HAVO wiskunde B?

[ Hielke Peereboom ]

Nu de stofwolken en kruitdampen van de 2010-examens zijn opgetrokken, lijkt het een goed moment om het slagveld van het CE havo wiskunde B te gaan overzien. De resultaten van de afgelopen twee jaar zijn dusdanig dat respectievelijk een N-term van 2,0 en 1,5 nodig is gebleken om een aanvaardbaar gemiddelde te krijgen, terwijl het ach en wee over deze examens luid heeft geklonken in wiskundig Nederland.
In de discussies die gevoerd zijn op het Examenforum van de NVvW en in de *WiskundE-brief*, lijken verschillende zaken door elkaar heen te lopen. Enerzijds is er de vraag of het CE van de afgelopen twee jaar passend is bij het examenprogramma, anderzijds zijn er vragen over en twijfels aan de haalbaarheid van het examenprogramma en in de derde plaats is er discussie over de positie van het vak wiskunde B.
In dit artikel zal ik ingaan op deze drie zaken waarbij ik de ervaringen op mijn eigen school betrek.
Tot aan vorig jaar heb ik decennia lang les gegeven in examenklassen havo B.
In verband met mijn werkzaamheden buiten de school worden deze lessen op mijn school nu gegeven door mijn collega Corstian Hanse. Ik ben er indirect nog wel bij betrokken en samen hebben we de examens van de afgelopen twee jaar doorgenomen en besproken.

### Passen de CE's van de afgelopen twee jaar bij het examenprogramma?

Om deze vraag te kunnen beantwoorden is het noodzakelijk de beide examens te toetsen aan de syllabus voor het CE.
Een korte terugblik op het 2009-examen omdat een jaar geleden in dit blad al uitgebreid hierop teruggeblikt is. Op onze school werd gemiddeld (na toepassen van N = 2) een 6,9 gescoord met het SE-gemiddelde van 5,9. Kijken we terug op dit examen, dan is onze conclusie dat het examen, wat het niveau betreft, past bij de eindtermen zoals die in de syllabus omschreven zijn en toegelicht met voorbeelden. We maken een uitzondering voor vraag 5 (*Vetpercentage*): deze zou zelfs op het vwo wiskunde B-examen voor veel problemen gezorgd hebben. Bij deze vraag moet de formule

$VP = (\frac{1}{d} \cdot 4{,}95 - 4{,}50) \cdot 100$

waarbij $d = \frac{G}{G-W}$

met $G$ = 100 herleid worden tot de vorm

$VP = a \cdot W + b$

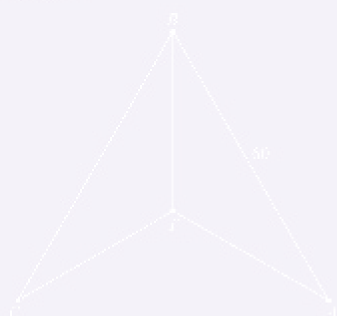
'De les die ik geleerd heb van het 2009-examen, is dat ik meer algebra ben gaan doen', aldus Corstian. 'De grafische rekenmachine laten we in principe aan de kant en in eerste instantie kiezen we binnen de analyse voor de algebraïsche aanpak. De GR is er dan voor de controle of voor die situaties dat het niet anders kan. Verder heb ik binnen de lessen vaak geen ruimte om tot een verantwoorde opbouw van de theorie te komen, maar moet ik me vaak beperken tot het aanleren van allerlei trucs die nodig zijn om de (examen)opgaven te kunnen maken. Dat is niet echt wat ik met wiskundeonderwijs voor ogen heb. Ik heb al helemaal geen tijd om eens iets leuks, interessants, uitdagends aan wiskunde buiten het boek te doen. Ook omdat ik een week of zes aan het eind van havo 5 wil besteden aan examentraining. Dat laatste is 100% nuttig en noodzakelijk', zo besluit Corstian.

### Het 2010-examen

Onze eerste indruk, het examen doorbladerend, is dat de omvang vrij groot lijkt, mede veroorzaakt door de 11 pagina's tekst. Verder denken we meteen een aantal lastige vragen te zien, zoals de vragen 2, 3, 8 en 10. We twijfelen over de meetkunde, daar moet je concreet mee aan de slag om daarover uitspraken met betrekking tot de moeilijkheidsgraad te kunnen doen. De meetkunde lijkt ons in dit examen vooralsnog niet al te moeilijk. Nadat we het examen zelf gemaakt hebben maar nog geen leerlingenwerk gezien hebben, wordt onze eerste indruk bevestigd. Het niveau is behoorlijk hoog. Hoewel uitsluitend vragen worden gesteld waarmee de leerlingen overweg zouden moeten kunnen, is het nergens echt gemakkelijk. Een aantal vragen is op het randje: 3, 8 en 10. Na de correctie lopen we samen het examen voor de derde keer langs.
De eerste opgave *Diersoorten* heeft een eenvoudige instapvraag die door vrijwel alle leerlingen foutloos wordt beantwoord. De resultaten van vraag 2 (tekenen in een logaritmisch assenstelsel) zijn opvallend: het is alles of niks. Bijna de helft van de leerlingen scoort de volle 5 punten en de rest weet hier eigenlijk geen punten te behalen. Vraag 3 waarin de formule $S = \frac{700}{L^2}$ moet worden herleid tot een formule van de vorm $\log S = p + q \cdot \log L$ is één van de lastigste van het examen. Lastig vanwege de abstractheid en het moeten kunnen toepassen van een aantal algebraïsche vaardigheden. Er is maar één leerling (van de 18) die de volle 100% score haalt op deze vraag. De vervolgvraag waarin wat gerekend moet worden met twee formules is weer beter te doen, met als resultaat dat ruim de helft hier alle punten binnenhaalt.
De eerste van de twee meetkunde opgaven gaat over de *Tetraëder van Bottrop*, een leuke opgave, niet helemaal standaard (***zie figuur 1 op pag. 27***). Zo moet in vraag 5 de exacte lengte van een lijnstuk in een bovenaanzicht worden berekend en dan is de exacte waarde van cos 30° nodig. Ongeveer een kwart van de leerlingen haalt de volle 4 punten en de rest haalt gemiddeld 2,5 punten bij deze vraag. Vaak is de exacte cosinuswaarde het struikelblok. Hoewel de volgende vraag een standaardvraag is, met een hoogteberekening van een piramide, zijn de resultaten hier teleurstellend met een gemiddelde score van 2 punten. De oorzaak zou wel eens kunnen zitten in het feit dat leerlingen de lengte van de projectie van een

Een regelmatige tetraëder is een viervlak waarvan de vier grensvlakken de vorm van een gelijkzijdige driehoek hebben. In figuur 1 is een bovenaanzicht van de regelmatige tetraëder $ABC.T$ te zien. Hierin is $ABC$ het grondvlak en $T$ de top. Er geldt $AB = 60$.

**figuur 1**




De lengte van $CT$ in het bovenaanzicht van figuur 1 is ongeveer 35.

5 Bereken exact de lengte van $CT$ in het bovenaanzicht van figuur 1.

Bij de Duitse stad Bottrop staat een stalen uitkijktoren die is ontworpen door de architect Wolfgang Christ. Zie de foto.

**foto**



De hoofdconstructie bestaat uit zes even lange buizen van 60 meter en heeft de vorm van een regelmatige tetraëder. Het bovenaanzicht van de tetraëder van Bottrop waarin alleen de hoofdconstructie wordt getekend, heeft dezelfde vorm als het bovenaanzicht in figuur 1.

De vier betonnen pijlers waar de tetraëder van Bottrop op staat, hebben een hoogte van 9 meter.

6 Bereken de totale hoogte van de uitkijktoren. Rond je antwoord af op een geheel aantal meters.

figuur 1 Uit: HAVO-B 2010 (Tetraëder van Bottrop)

ribbe, nodig voor de hoogteberekening, uit de stam van de vraag die eraan voorafgaat, moeten halen.
Vervolgens is bijna een complete pagina tekst nodig om een vraag over een bovenaanzicht in te leiden (***zie figuur 2***). De figuren 2 en 3 lijken vrijwel identiek, maar de ene is een ruimtelijke figuur en de andere een bovenaanzicht. De resultaten vallen mee: slechts drie leerlingen halen hier 0 punten, de rest scoort 3 of 4 punten.
De derde opgave, *Raken*, bestaat uit één vraag met maar liefst 7 punten die bij ons door geen enkele leerling gehaald worden. Er wordt ook nogal wat van de leerlingen gevraagd: het differentiëren van de ingewikkelde goniometrische functies $f(x) = (x^3 - 2x)\cdot\sin(x-2)+5$ en $g(x) = 4x + 10\sin(\frac{1}{4}\pi x)$
Hier moeten combinaties van productregel, somregel en kettingregel worden toegepast, inzicht en GR-(reken)vaardigheid. Hoewel van zeer hoog havo-niveau, moet één zo'n vraag wel kunnen op een CE vinden wij.

De volgende opgave over de *Archimedes Wave Swing* heeft betrekking op een actueel thema, namelijk energieopwekking uit de golfbeweging op zee. De opgave bevat wel erg veel tekst, maar liefst drie pagina's! De eerste vraag is standaard: het berekenen van *a*, *b* en *c* in de formule $h = b + a \cdot \sin(ct)$ bij gegeven periode en extreme waarden van *h*. Sommige leerlingen gaan in de fout omdat in de methode die wij gebruiken (*Moderne wiskunde*), in dit soort formules de letters *a* en *b* net andersom staan. Verder scoren de leerlingen hier prima op. De tweede vraag (***zie figuur 3***) is een prachtige vraag wat betreft functioneel gebruik van de GR. Omdat sowieso de rol van de GR bij ons op school terug gedrongen is ten faveure van de algebra – en dit zal op veel scholen het geval zijn – wordt deze vraag zeer slecht gemaakt. De leerlingen zijn niet getraind op dit soort GR-gebruik. Resultaat: bij ons om precies te zijn één leerling met de volle punten, een vijftal met 3 of 4 punten en voor de rest uitsluitend nullen. Bij de laatste twee vragen wordt wel erg veel voorgekauwd (te veel naar ons idee) door de examenmakers, vooral bij vraag 11: doe eerst dit, vervolgens dat en tenslotte …
Bijna alle leerlingen halen bij deze twee vragen minstens 8 van de 10 te halen punten. Als modelleren in de 2014-examenprogramma's meer aan bod gaat komen als wiskundige denkactiviteit [1], dan verwacht ik iets anders op een examen als hier bij vraag 11.
In tegenstelling tot de vorige is de volgende opdracht (*Snijpunt*) bijzonder 'kaal' wat tekst betreft. Gegeven zijn twee functies *f* en *g* en bereken op algebraïsche wijze de coördinaten van het snijpunt. Het oplossen van de vergelijking $2^{4x+1} = 4\cdot 4^x$ is er één van het standaardtype zoals we die ook in de schoolboeken uitvoerig langs zien komen. Een vraag ook die heel goed past binnen de aangescherpte algebra-eisen.
Er wordt redelijk op gescoord door onze leerlingen, hoewel slechts twee leerlingen alle 6 punten binnenhalen. Vaak wordt de *y*-coördinaat vergeten.
Vervolgens is de meetkunde weer aan de beurt met twee vragen over een *Bloempot* (***zie figuur 4 op pag. 29***). De eerste, een inhoud berekenen van een afgeknotte piramide, is standaard en daar mag niemand over klagen. Dat wil niet zeggen dat leerlingen hier geen moeite mee hebben: gemiddeld 2 van de 5 punten! Vervolgens is weer heel veel tekst en een nieuwe figuur nodig om de leerlingen zover te krijgen dat ze bij nog een inhoudsberekening gebruik maken van de vergrotingsfactor. Hier hadden wij graag wat anders gezien.
De meetkunde in dit examen is een beetje eenzijdig: twee opgaven over een piramide, wel of niet afgeknot.
Het examen wordt afgesloten met een wortelfunctie waarover twee vragen worden gesteld. In de eerste moet met behulp van differentiëren (kettingregel!) de exacte waarde van een helling berekend worden. Een standaardvraag naar onze mening en dat blijkt ook uit de scores van de leerklingen. Als laatste een vraag waarin aangetoond moet worden dat de grafiek van de gegeven functie en een rechte lijn geen snijpunt hebben. Dat betekent het oplossen van de wortelvergelijking $\sqrt{x^2 - 6x} = x - 2$.
Een vraag die weer prima past bij de eindtermen. De wortel is al geïsoleerd dus ook deze vraag zouden leerlingen binnen dit programma prima moeten kunnen doen. Ongeveer tweederde deel haalt hier minstens 4 van de 5 punten.

Onze eindconclusie: dit examen past goed binnen de kaders zoals die in de syllabus zijn aangegeven. We zien geen vraag die op grond van de syllabus 'niet zou kunnen'. Dat het examen toch als moeilijk wordt beoordeeld, heeft te maken met andere zaken.

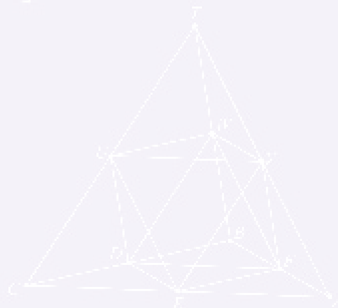
**Is het huidige examenprogramma haalbaar?**

Een bloemlezing uit de reacties op het Examenforum en uit de *WiskundE-brief*:
Het programma is:
- te uitgebreid;
- te moeilijk;
- te ambitieus;
- te divers voor 1½ jaar wiskunde in de Tweede fase.

Ik ben het gedeeltelijk eens met bovenstaande. Ik vind het programma niet te moeilijk, te ambitieus of te divers. Als we het niveau van dit programma vergelijken met examenprogramma's uit het verleden, dan is niet vol te houden dat het huidige programma veel te moeilijk is. Het wordt echter wel als zodanig ervaren omdat er mijns inziens gewoon (te) weinig tijd is om al die verschillende programmaonderdelen en vaardigheden op de leerlingen over te brengen en in voldoende mate te laten beklijven.Er moet te veel in te weinig tijd gebeuren. Corstian: '*Moderne wiskunde* heeft buiten de reguliere hoofdstukken prachtige paragrafen met het trainen van algebraïsche vaardigheden, maar ik kom daar gewoon niet aan toe met mijn gemiddelde van 2,5 klokuren per week.'
Ik ben van mening dat met de invoering van de Tweede fase er veel contacttijd verloren is gegaan. Ik kan me de tijd herinneren dat ik in havo 4/5 maar liefst 9 (= 5 + 4) lessen van 50 minuten tot mijn beschikking had tegenover 5 (= 2 + 3) lessen van 60 minuten nu. Dat is een teruggang van ruim 33%! Wellicht dat de studielast iets kleiner is dan destijds, maar zeker niet zoveel dat een dergelijke teruggang in lestijd rechtvaardigt.
Mijn conclusie: het huidige wiskunde B-programma is binnen de gegeven studielast niet of nauwelijks haalbaar.
Dus schrappen in het programma? Nee, liever niet, omdat het programma op zich mooi en evenwichtig is, passend bij het type leerling, passend bij de behoeftes van vervolgopleidingen. Ik pleit voor verhoging van het aantal slu's voor wiskunde B met minimaal 40 maar nog beter 60, en

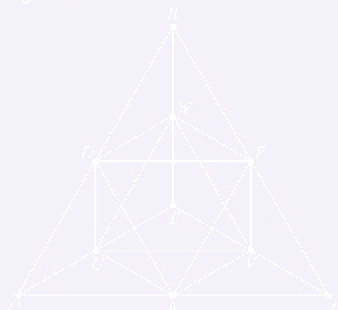
Bij de bouw van de uitkijktoren werden in elk van de vier grensvlakken van de grote tetraëder de middens van de zijden met elkaar verbonden. Hiervoor zijn in totaal 12 buizen van 30 meter gebruikt. Zie figuur 2.

**figuur 2**



In figuur 3 is van dit gedeelte van de tetraëder een bovenaanzicht getekend. Op de uitwerkbijlage is deze figuur vergroot weergegeven.

**figuur 3**



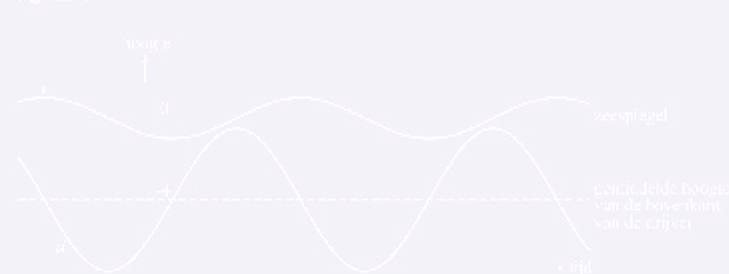
De hoofdconstructie van de uitkijktoren is tetraëder $ABC.T$. In figuur 2 zijn nog vier kleinere tetraëders te onderscheiden: $UFW.T$, $CED.U$, $BDF.W$ en $AFE.V$. Op de foto is te zien dat bij drie van deze kleinere tetraëders de middens van de zijden in de grensvlakken met elkaar verbonden zijn. Daarvoor zijn in elk van deze drie tetraëders 12 buizen van 15 meter gebruikt.

7 Teken in het bovenaanzicht op de uitwerkbijlage de 12 buizen van 15 meter in tetraëder $CED.U$.

figuur 2 Uit: HAVO-B 2010 (Tetraëder van Bottrop)

Van een bepaalde AWS bevindt de bovenkant van de drijver zich gemiddeld 4,0 meter onder de zeespiegel. De zeespiegel is de gemiddelde waterhoogte. Zie figuur 3. De hoogte $d$ van de bovenkant van deze drijver ten opzichte van de zeespiegel wordt nu beschreven door: $d = -4{,}0 - 3{,}5\sin(0{,}5t)$, met $d$ de hoogte in meter en $t$ de tijd in seconde.
De waterhoogte ten opzichte van de zeespiegel hangt af van de amplitude van de golven. Hiervoor geldt de formule $w = -A \cdot \cos(0{,}5t)$. Hierin is $w$ de waterhoogte in meter, $A$ de amplitude van de golven ($A > 0{,}5$) in meter en $t$ de tijd in seconde. In figuur 3 zijn grafieken van $d$ en $w$ getekend voor een bepaalde waarde van $A$.

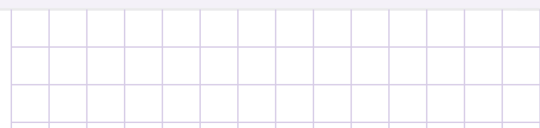
**figuur 3**




In de situatie van figuur 3 blijft de bovenkant van de drijver altijd onder water. Maar als de amplitude van de golfbeweging verder toeneemt, kan de drijver soms boven het water uitsteken.

10 Onderzoek met de grafische rekenmachine vanaf welke amplitude van de golfbeweging de drijver af en toe boven water verschijnt. Rond je antwoord in meter af op één decimaal.

figuur 3 Uit: HAVO-B 2010 (Archimedes Wave Swing)



wel meteen, zodat docenten en leerlingen de tijd krijgen die ze nodig hebben om het programma op de juiste wijze onder de knie te krijgen. Minister en CvE: doe uw plicht! Overigens, ten aanzien van de inhoud van het 2014-examenprogramma voor havo wiskunde B lijkt zich een nog grotere overladenheid voor te gaan doen. In de context van de huidige situatie zal dat, als daarin niets verandert, wel eens de doodsteek voor het prachtige vak wiskunde B kunnen betekenen!

### De positie van het vak wiskunde B

Mede door de als (zeer) moeilijk ervaren centrale examens van de afgelopen twee jaren komt de positie van het vak wiskunde B onder druk te staan. De geluiden dat wiskunde B een moeilijk vak is, dringen door naar leerlingen in de 3e klas die een keuze moeten maken tussen wiskunde A of B, en te vrezen valt dat dit niet tot een toename van het aantal leerlingen bij wiskunde B zal leiden… Temeer daar de geluiden bij wiskunde A ten aanzien van de moeilijkheidsgraad juist andersom zijn.
Daarnaast zijn meer factoren die de positie van het vak wiskunde B geen goed doen:

- de aanstaande verzwaring van de zak-slaag-regeling;
- het feit dat geen enkele bèta-vervolgopleiding binnen het hbo, met uitzondering van de lerarenopleiding, het vak wiskunde B als toelatingseis heeft opgenomen, maar overal wiskunde A voldoende acht.

Ik vrees dat leerlingen en ouders, bovenstaande zaken in ogenschouw nemend, in toenemende mate het vak wiskunde B links zullen laten liggen. En dan heb ik het nog niet eens over berichten die mij bereiken van scholen waar directies besluiten om het vak wiskunde B exclusief te verbinden met het profiel Natuur en Techniek! En wat voor gevolgen heeft dit voor het vak wiskunde D?
Overigens vind ik het een schande dat hbo-instellingen het zich kunnen veroorloven om bij bèta-opleidingen, zoals werktuigbouwkunde, leerlingen met wiskunde A toelaatbaar te vinden. Hier zou van mij van hogerhand ingegrepen mogen worden.

### Losse eindjes

Hier wil ik nog even ingaan op een aantal opmerkingen op het Examenforum en uit de *WiskundE-brief*:

- Leerlingen besteden (te) weinig tijd aan (t)huiswerk (studielast buiten de lessen).
- De studiehouding van de havo leerling is vaak onvoldoende.
- Leerlingen raken weg kwijt met betrekking tot wanneer een berekening exact moet, dan wel met de GR mag.
- Docenten raken het overzicht kwijt door de snel wisselende programma-inhouden.
- Hebben de samenstellers van het examen de laatste jaren nog wel eens een havo B-leerling van dichtbij gezien?

Met de eerste twee opmerkingen kan ik niet zoveel en deze mogen in het geheel geen factor zijn bij de discussie over niveau en haalbaarheid van wiskunde B. Dat leerlingen de weg kwijt raken bij 'wel of geen GR' zegt iets over de leerlingen en/of over hun docenten, want het is heel simpel: 'Bereken exact …' en 'Bereken algebraisch …' betekent *geen* GR en 'Bereken …' betekent dat je de GR mag je gebruiken. Sterker nog: ik zou de leerlingen zelfs op het hart drukken om in een dergelijke situatie de GR te gaan gebruiken, want vaak is de algebraïsche weg bij een zo'n vraag onbegaanbaar.
Tja, moet ik de vierde opmerking serieus nemen als we het hebben over hoog opgeleide docenten die zich, zo schat ik, gemiddeld één keer in de acht jaar geconfronteerd zien met wisselende examenprogramma's? Breng een avond door met de *Handreikingen* van de SLO en *Syllabussen* van het CvE en dan ga je niet meer dit soort dingen roepen.
En ten aanzien van de laatste opmerking: de realiteit is zo dat een examenconstructiegroep naast een Cito-medewerker bestaat uit drie (soms vier) docenten die dagelijks voor de klas staan en lesgeven aan havo-B leerlingen!
Tot slot een tip aan alle collega's: wees geen slaaf van de methode die je gebruikt. Stel op basis van de exameneisen voor je zelf vast wat je per onderwerp hiervoor uit je boek nodig hebt en durf opdrachten of soms hele paragrafen te schrappen. Het is zo dat je met een kritische blik naar je methode kijkend vanuit het perspectief van de exameneisen (veel) tijdwinst kunt boeken. Met als gevolg dat je aan het eind van havo 5 een week of acht overhoudt die je kunt besteden aan herhaling en examentraining.

### Conclusies

Terugkomend op de titel boven dit stuk: er is niks mis met de centrale examens voor havo wiskunde B.
Er is wel wat mis met de bijbehorende studielast: die moet met minstens 40 slu's omhoog. In combinatie met de vernieuwde

Een bedrijf in België maakt aluminium bloempotten. Zie de foto. Wanneer je de bloempot op zijn kop zet, zie je goed dat deze de vorm heeft van een afgeknotte regelmatige vierzijdige piramide. In figuur 1 is het meetkundige object getekend dat overeenkomt met de buitenkant van de bloempot. $ABCD$ en $EFGH$ zijn vierkanten, waarbij $AB = 25,0$ cm en $EF = 20,0$ cm. De hoogte van de bloempot is 30,0 cm.

foto

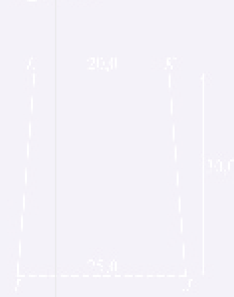


In figuur 2 is de verticale doorsnede $KMNL$ getekend.

figuur 1



figuur 2




De inhoud van het meetkundige object in figuur 1 is ongeveer 15 liter.

14 Bereken de inhoud van het meetkundige object in figuur 1. Rond je antwoord in liter af op één decimaal.

figuur 4 Uit: HAVO-B 2010 (Bloempot)

onderbouw, die sterker algebraïsch toegeruste leerlingen zal gaan afleveren, zullen in het vervolg geen belachelijk hoge N-termen meer nodig zijn. We gaan dan meemaken dat we na afloop van de centrale examens tevreden tot misschien wel enthousiaste leerlingen en docenten zien!

**Noot**

[1] Zie: *Rijk aan betekenis*, het visie-document van cTWO (2007). Te vinden op *www.ctwo.nl*.

**Over de auteur**

Hielke Peereboom is wiskundedocent aan het Bornego College te Heerenveen, in het recente verleden betrokken geweest bij het tot stand komen van havo wb1 en wb12 examens, en momenteel lid van cTWO-projectteam en als zodanig betrokken bij de invoering in 2014 van de vernieuwde wiskunde-examenprogramma's.
E-mailadres: *h.peereboom7@upcmail.nl*

# VWO – wiskunde C

[ Ineke van Pol-Frijters ]

Nadat de leerlingen op dinsdag 25 mei de examenzaal hadden verlaten, was de enigszins verontwaardigde reactie van mijn twee wiskunde C-leerlingen: 'Mevrouw, er zat inderdaad een normale verdeling in, maar het was nog geeneens een echte!' Gelukkig bleek dat ze dit onderdeel goed hadden gemaakt, alleen de conclusie was niet naar tevredenheid.
Nadat ik in september begrepen had dat A1-leerlingen hetzelfde examen gingen maken als mijn C-leerlingen, vermoedde ik al wel dat het met de vaardigheden niet zo'n vaart zou lopen. Toch was ik, en met mij mijn twee collega's die ik sprak in het kader van de tweede correctie, de heren I. Osinga (Fivelcollege, Delfzijl) en F. de Groot (Ommelandercollege, Appingedam), wat teleurgesteld dat er geen vergelijkingen exact opgelost hoefden te worden. Ook vonden wij de kansrekening er wat slap uitkomen.
Na jaren mijn leerlingen aangegeven te hebben dat ze moeten bekijken of het wiskundige antwoord ook klopt met de context, was ik niet verrast dat mijn leerlingen bij onderdeel 6 (*Boomgroei*; ***zie figuur 6 op pag. 9)*** een biologisch verantwoord antwoord gaven. Jammer dat daar niets over stond in het correctiemodel en helemaal sneu – zeker voor die wiskunde C-leerlingen – dat ik daar zo weinig punten voor mocht geven (***zie figuur 1***). En erg vervelend dat ik ze niet voorbereid had op het beantwoorden van dit soort vragen.
Verder neem ik uit dit examen mee dat ik mijn collega die volgend jaar de C-leerlingen voorbereidt op het examen, adviseer om wat meer met procentrekenen en het herschrijven van formules te oefenen.
Ik wens een ieder voor volgend jaar veel succes, en stiekem hoop ik dat er dan toch één (eenvoudige) vergelijking exact opgelost moet worden.

**6 maximumscore 4**

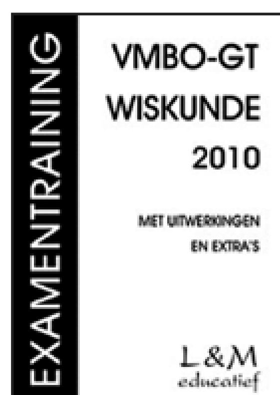
- Er moet (voor alle waarden van $a$, $b$ en $c$) gelden: als $t = 0$, dan $h = 0$ — 1
- Als $t = 0$ dan ($b^0 = 1$ en dus) $1 - b^0 = 0$ — 1
- $(1 - b^0)^c = 0^c = 0$ — 1
- $h = a(1-b^0)^c = a \cdot 0 = 0$ — 1

figuur 1 Uit: Correctievoorschrift VWO-A1/C 2010 (Boomgroei)

**Over de auteur**
Ineke van Pol-Frijters is docente wiskunde aan het Willem Lodewijk Gymnasium te Groningen.
E-mailadres: *i.vanpol@wlg.nl*

# Boekbespreking / Examentraining VMBO-GT Wiskunde 2010

[ Frans Ballering ]




Auteur: drs. C.J. ter Horst
Uitgever: L & M Educatief, Zeist
ISBN 978 90 54892823
Prijs: € 14,95

Vijf examens met en vijf examens zonder uitwerkingen, plus een proefexamen dat in één uur gemaakt kan worden. Daarnaast bevat deze uitgave voor leerlingen leesbare toelichting bij de eindtermen en begrijpelijke uitwerkingen. Dat belooft het voorwoord aan de docent.
De uitwerkingen doen een lofwaardige poging om vragen te voorkomen. Iedere leraar weet natuurlijk dat dat niet helemaal kan, want leerlingen verzinnen altijd weer andere oplosmethoden. Een nadeel van die leesbaarheid is het vele leeswerk. En eveneens zal voor leerlingen niet zo duidelijk zijn wat je nu minstens moet opschrijven bij zo'n examen.
Soms begint een uitwerking met een geruststellend '… vooral goed lezen' of '… is niet meer dan…' of soortgelijke opmerkingen. Vrijwel altijd wordt dan ook het doel aangegeven: wat moet je berekenen. Ik denk dat het in sommige gevallen wel aan te bevelen is om wat meer visueel materiaal toe te voegen, zodat ook leerlingen die meer daarop zijn ingesteld aan hun trekken komen.
Ook bij 'wat je moet weten en kunnen' zijn de omschrijvingen die door de auteur zijn gekozen, voor veel leerlingen goed leesbaar. Van de kleine foutjes die ik gezien heb, zullen de meeste leerlingen geen last hebben. Maar bij een exponentieel verband '$y = bg^t$' waar '$b$ staat voor beginwaarde en $g$ voor groeitijd' zullen leerlingen het spoor bijster raken.
Een woord als kruistabel staat niet in alle schoolboeken en kan dus beter worden vervangen door verhoudingstabel.
Pijlenkettingen zijn opvallend afwezig in de uitwerkingen.
Samenvattend: een bruikbaar boek bij de voorbereiding op het examen met veel steun voor de leerlingen.

**Over de recensent**
Frans Ballering is docent wiskunde en didactiek op de Lerarenopleiding Voortgezet Onderwijs van de Hogeschool Rotterdam.
E-mailadres: *fransballering@hetnet.nl*

# Waarom moeten we onredelijk zijn?

## INZAKE HET HAVO WISKUNDE B-EXAMEN

[ Jan van der Maas ]

Wat u nu gaat lezen is geschreven naar aanleiding van het laatste havo wiskunde B-examen. Er was wat mij betreft nogal wat aan te merken op de helderheid van de vragen, de duidelijkheid van de foto's, een onjuist geformuleerde vraag (nummer 10) waardoor een juist antwoord (1,9) fout gerekend moest worden; flauw gedoe met afronden en de jaarlijkse frustratie als ik toe moet kijken hoe de biologische en natuurkundige contexten enerzijds en de wiskunde anderzijds elkaar afbreuk doen.
Voor dit alles heb ik echter begrip, het is ook niet gauw goed genoeg. Ontstemd was ik wel tijdens de zitting over de puntenaantallen: in totaal maar 77, terwijl het examen groot genoeg was voor een kleine 100. Ik voorzag binnen een uur dat dat waarderingsproblemen met zich mee ging brengen; dat hadden de opstellers ook moeten voorzien. Waardering heb ik ook: voor de originaliteit (en niet te origineel) van de problemen en voor het precies goede niveau.
Wat mij in het toetsenbord doet klimmen, zijn de correctievoorschriften en de regionale examenbespreking die op het examen volgde. Ik ben geschrokken van de *prinzipienreiterei* die dat hier en daar ademde.
In mijn lessen gebruik ik graag de oneliner 'Goed is goed, en de rest is onzin'. Ik vind dat ook van harte, maar het is een slechte leidraad als het op nakijken en punten toekennen aankomt. Het doet dan namelijk in sommige gevallen de leerling in mijn ogen apert te kort; en waarom zouden we zo onredelijk willen zijn? Wat doet een examen eigenlijk? Het meet, dunkt mij, kennis, inzicht en vaardigheid van de kandidaat. Het examen is er om de kandidaat te laten zien wat hij kan; naar mate hij meer laat zien, krijgt hij een hoger cijfer. Een overgeslagen vraag of een onzinnig antwoord wordt beloond met 0 punten, een goed antwoord met de $n$ punten die er voor staan en alles wat daar tussen zit, krijgt een billijke fractie van $n$. Dat blijkt geen algemeen principe meer te zijn…

Uit het laatste havo B-examen (*Diersoorten*, vraag 3):

> De formule $S = \dfrac{700}{L^2}$ is met behulp van algebra om te werken tot de vorm
> $\log S = p + q \cdot \log L$
> Bereken op deze manier de waarden van $p$ en $q$.

Uit de centrale bespreking: 'Algebraïsche omwerking van de formule is hier vereist; dus: $p$ en $q$ correct bepaald door middel van aflezen van de rc uit de figuur en door berekening van de startwaarde: 0 pt.'
Op de regionale bespreking werd mij verteld dat ook mijn leerlingen die $p$ en $q$ gevonden hadden door twee ($S$, $L$) paren te bepalen en daaruit $p$ en $q$ afleidden, met 0 punten beloond dienden te worden.
Natuurlijk snap ik net als u wat de vragenstellers willen zien – en ik wil hetzelfde zien- maar een kandidaat die aantoont dat áls de vergelijking om te vormen is, de enige kandidaten voor $p$ en $q$ respectievelijk 2,85 en -2 zijn, heeft ontegenzeggelijk meer laten zien dan iemand die de vraag overslaat. Die leerling wordt met 0 punten dus tekort gedaan. Mijn gevoel voor billijkheid zegt maximaal 2 punten en ik kan leven met 1 punt.
Gelukkig gaat het maar om een klein deel van het puntentotaal, maar het is van fundamenteel belang: bij het nakijken moet *de leerling* recht gedaan worden en niet in de eerste plaats de vragen(stellers).

Voor het overige blijf ik van mening dat het gebruik van elektronische hulpmiddelen tijdens het leerproces gestimuleerd en tijdens toetsen verboden moet worden, en ik betuig mijn adhesie aan Sieb Kemme die in het vorige nummer van *Euclides* voorstelde de maskerende N-termen gewoon af te schaffen.

**Over de auteur**
Jan van der Maas is docent aan het Jac. P. Thijsse College in Castricum.
E-mailadres: *maas6065@planet.nl*

# VWO-wiskunde A

## HET GEVREESDE EXAMEN WISKUNDE

[ Harmen Westerveld ]

Ik wil u voorstellen aan mijn vwo-6 wiskunde A-klas, aangevuld met 1 leerling wiskunde C. Ik heb deze groep nu twee jaar onder mijn hoede en denk dat ik redelijk goed hun niveau kan inschatten. Als groep zijn ze lastig (lees: letten slecht op), zwak (gemiddelde SE-cijfer 5,8), moeilijk aan het werk te krijgen, maar behept met de verbale begaafdheid om bij elke diepgang, van welk onderwerp dan ook, navraag te doen of dit ook op het examen gevraagd 'gaat' worden. Geduldige uitleg dat ik het examen niet ga samenstellen en deze vraag noch positief noch negatief kan beantwoorden, was hierbij onvoldoende. In de aanloop naar het examen werd de spanning steeds groter: 'Als ik maar ga slagen voor wiskunde!' Bijspijkercursussen vonden gretig aftrek. Helaas moet ik nu achteraf constateren dat deze leerlingen hun 'gelijk' gehaald hebben. Na het examen was een aantal reacties dat ze ten onrechte bang gemaakt waren voor wiskunde. Na de tweede correctie had de klas een gemiddelde gescoord van 53,0 punten. Bij een te verwachten N-norm van 0,9 zou het gemiddelde cijfer 6,4 zijn, met als gevolg dat ik weer ter verantwoording geroepen kon worden om uitleg te geven over het te grote verschil tussen SE- en CE-cijfer. Daar komt de persoonlijke vraag, of mijn toetsen misschien toch niet te moeilijk waren, bovenop. Met een uiteindelijke N-score van 0,7 werd ik gespaard voor deze nachtmerrie: het resulterende gemiddelde van 6,2 viel net binnen de grenzen!

Wat volgens mij ten grondslag ligt aan dit resultaat.

1. Mijn algemene indruk is, dat het geen lastig/moeilijk examen was. Er werd echter relatief veel aandacht aan statistiek en kansrekening besteed en relatief weinig aan algebra. Verder viel mij op dat er veel punten voor redeneervragen gereserveerd waren (opgaven 10, 13 en 20 met totaal 14 punten) ter compensatie van eventuele algebraïsche vragen. Verbaal sterke leerlingen waren hierbij in het voordeel.

2. De verwachting was, aangewakkerd door de politieke beroering over het slechte rekenniveau van leerlingen, dat er meer op algebraïsche kennis getoetst zou worden. Alle wiskundemethodes zijn over de gehele linie – en volgens mij terecht – veel meer aandacht gaan besteden aan algebra. Ook voor leerlingen met wiskunde A als voorbereiding op het wetenschappelijk onderwijs, waar aan algebra serieus aandacht besteed wordt bij veel studies; denk hierbij aan de economische richtingen in het vervolgonderwijs. Voor de goede orde: onze school gebruikt de boeken van *Getal & Ruimte* in eerste en tweede fase, aangevuld met eigen materiaal. Dit eigen materiaal is bedoeld om geen al te grote cultuurschok tussen eerste en tweede fase teweeg te brengen en is verder bedoeld voor onderhoud van algebra gedurende het verblijf in de tweede fase. Hierin vond de wiskundesectie van onze school de methode tekortschieten. Achteraf was dit misschien verspilde moeite.

3. In het examen waren veel punten te verkrijgen bij onderwerpen die marginaal aan de orde komen in de wiskundeboeken voor het vo, maar ook in vervolgopleidingen: tekentoets en normaal waarschijnlijkheidspapier. Bovendien werd de vraag over dit normaal waarschijnlijkheidspapier gecombineerd met een logaritme – een onderwerp waar zelfs menige B-leerling niet enthousiast van wordt. De moeilijkheidsgraad van deze opgave was niet hoog, maar bij het zien van een logaritme slaan enkele van mijn leerlingen al dicht. Daar komt de vraag over het lineair interpoleren nog eens bij (***zie figuur 1***; *Inkomen*, vraag 14). Het onderwerp werd nog wel behandeld in editie 2003 van *Getal & Ruimte*, maar ik kan het niet terugvinden in editie 2007. Gelukkig hadden veel leerlingen gevolg gegeven aan mijn oproep een woordenboek mee te nemen naar het examen, maar dat bood weinig soelaas in mijn ogen:

- ***in·ter·po·le·ren*** – *leerde, h geïnterpoleerd*: inschuiven, inlassen (*Koenen*), of:
- ***interpola'tie*** *v* [-s]: inlassing; ***interpo-le'ren***: invoegen (*Prisma*).

Om maar enkele voorbeelden te noemen. De reactie van de examencommissie op de klacht van het LAKS over dit onderwerp kan ik dan ook maar ten dele plaatsen: '*Het College voor Examens heeft de klachten voor wiskunde A helaas ongegrond verklaard.* Bij het lineair interpoleren: zowel interpoleren als lineair zijn elk afzonderlijk bekend. De begrippen staan niet in de eindtermen – de eindtermen zijn echter nu eenmaal niet een opsomming van alle begrippen die de leerling moet kennen –, maar horen wel bij de standaard begrippen bij wiskunde. Lineair is bekend bij veel leerlingen, interpoleren ofwel het vinden van een tussenwaarde is bekend, de combinatie spreekt voor zichzelf als hij niet in de methode voor zou komen.'[1]

Mijn leerlingen wisten ondanks hun gemis aan kennis en vaardigheden op deze vraag, dankzij hun verbale en daaruit voortvloeiende schriftelijke vaardigheden, gemiddeld 2,7 van de 5 punten te scoren.

4. Het was wel fijn dat het examen begon met een onderwerp waarbij relatief eenvoudige vaardigheden getoetst werden. Dit om de eerste angst voor het examen

**tabel 1**

| besteedbaar inkomen in euro's | aantal huishoudens in duizendtallen |
|---|---|
| 0 – 10 000 | 490 |
| 10 000 – 20 000 | 2057 |
| 20 000 – 30 000 | 1777 |
| 30 000 – 40 000 | 1309 |
| 40 000 – 50 000 | 687 |
| 50 000 – 70 000 | 460 |
| meer dan 70 000 | 197 |

Met behulp van lineair interpoleren kun je een schatting maken van het percentage huishoudens met een besteedbaar inkomen van ten hoogste 27 000 euro.
Schat dat percentage huishoudens met behulp van lineair interpoleren.

figuur 1 Uit: VWO-A 2010 (Inkomen)

wiskunde weg te nemen en de leerlingen een gevoel van vertrouwen te geven. De vraag over de afgeleide van $v = 2{,}836 \cdot x^{0{,}665} - 1{,}390 \cdot x^{0{,}818}$ (*Marathonloopsters*, vraag 3), de enige over dit onderwerp, vond ik dan wel weer van kinderlijke eenvoud. Al mijn lessen over productregel, kettingregel en quotiëntregel worden hier teniet gedaan. Laat staan de lessen die gingen over combinaties van één of twee van deze regels. Vergeleken met de afgeleide functies die geproduceerd moesten worden bij het B-examen van mijn havo-leerlingen [2], kwamen veel van mijn zwakkere vwo-leerlingen er wat dit onderwerp betreft te makkelijk vanaf.
Om nog maar te zwijgen van mijn enige leerling met wiskunde C; die hoefde al helemaal geen afgeleide functie te kunnen produceren. Wat was er mis met het programma voor wiskunde A1?

Samenvattend wil ik concluderen, dat, als dit examen de norm gaat worden voor toekomstige examens wiskunde A (en C), ik als docent drastisch met de stofkam moet gaan door de aangeboden leermiddelen. Ik vind dat daarmee niet alleen het vak wiskunde A en de docent ondergewaardeerd worden, maar vooral ook de leerling op het voorbereidend wetenschappelijk onderwijs die kiest voor een niet-beta-gericht profiel.

**Noten [red.]**

[1] Bron: website van het LAKS (*www.examenklacht.nl*); update 28 mei 2010.

[2] Bedoeld zijn de afgeleide functies van: $f(x)=(x^3-2x)\cdot\sin(x-2)+5$ en $g(x)=4x+10\sin(\frac{1}{4}\pi x)$ uit het vraagstuk *Raken* (opgave 8).

**Over de auteur**
Harmen Westerveld is docent aan het Oosterlicht College in Nieuwegein.
E-mailadres: *h.westerveld@oosterlicht.nl*

# VWO-wiskunde A

## OP HET VERKEERDE BEEN

[ Mieke Thijsseling ]

Hoe bereid je leerlingen voor op een examen waarvan je niet meer dan een vermoeden hebt over hoe het eruit zal zien? Om te beginnen lees je alle informatie die er tot je beschikking staat en controleer je of de methode die je gebruikt daar voldoende op aansluit. Dat lijkt aardig te kloppen. En vervolgens maak jij, de docent, keuzes: de rijen, reeksen en matrices in het schoolexamen, wat meer en frequenter algebraïsche vaardigheden in de toetsen. Want, zo is ons beloofd, daarin zit de verzwaring van het programma.
Ze piepen en zuchten, mijn leerlingen. De meesten hebben wiskunde A gekozen omdat wiskunde B (we hebben het natuurlijk over het oude B1-programma) te moeilijk is. Waarop baseert een leerling deze mening? Allereerst op onze voorlichting in klas 3 en 4, maar veel belangrijker voor de keuze die een leerling maakt, is de mond-op-mondreclame van de ouderejaars. En hier zit natuurlijk de crux, want de ouderejaars volgden een ander programma.
Een stevige basis in het kunnen oplossen van allerlei vergelijkingen en ongelijkheden zonder de grafische rekenmachine. Daar moet je hard aan trekken in een typische alfa-klas. Vragen als: ‘Moeten we dit echt kunnen? Dit is toch wiskunde B?’ werden regelmatig gesteld en door mij beantwoord met: ‘Ik weet niet hoe het examen er uit gaat zien, maar ik vind wel dat je dit moet kunnen.’ Ik heb geworsteld met deze groep de afgelopen twee jaar. Veel herhalen, nog eens een overzicht met verschillende oplossingsstrategieën, nog eens herhalen. Met uiteindelijk de overtuiging dat ik ze behoorlijk goed heb voorbereid op dit nieuwe examen.
‘Lees goed wat er staat!’ Dat zal elke docent uitentreuren blijven roepen. Dat was, is en zal altijd zo blijven. Daar zit het nieuwe niet in. Waar ik, en met mij vele collega’s, meer vragen verwachtte in de richting van: ‘Los dit exact op’, ‘Bepaal op algebraïsche wijze’, ben ik behoorlijk teleurgesteld. Lees de opmerkingen op het NVvW-examenforum en je krijgt een goede indruk van hoe wij, de docenten, en masse op het verkeerde been zijn gezet.
Lang blijven mopperen ligt niet in mijn aard. Hoe ga ik mijn huidige groep klas 5 wiskunde A voorbereiden? Een tandje minder met de algebra, en wat meer energie inzetten op inzicht in de formules en hoe die werken. Een mooie uitdaging voor een docent met een taalvaardige, babbelende alfa-klas.

**Over de auteur**
Mieke Thijsseling is docente aan het Willem Lodewijk Gymnasium in Groningen.
E-mailadres: *thy@wlg.nl*

# Babyboomer met fpu

## OF: HET BLOED KRUIPT WAAR HET NIET GAAN KAN

[ Heiner Wind ]

### VWO – wiskunde B

**FPU**

Per 1 januari 2008 ging deze babyboomer officieel met fpu. De verlokkingen van het ‘Zwitserleven’ en die van het leraarsbestaan hebben maanden gevochten om de voorrang; toch maar gekozen om gebruik te maken van de bestaande regeling, voordat die weer verder zou verslechteren. Afscheid nemen van de ‘jeugd van tegenwoordig’ zal een jaar later toch ook niet gemakkelijker zijn. Gelukkig kon ik het eerste jaar enkele keren een of twee weken invallen op mijn oude school en dat is in het kader van het afkickproces heel fijn: onbekommerd lesgeven, geen vergaderverplichtingen en alle andere toestanden; een mooier schoolleven bestaat niet.

**Voorjaar 2010**

Langzaam maar zeker begin ik het onderwijs los te laten. Hoewel, los? Mijn opvolgster was mijn laatste, veelbelovende, LIO, en die groeide nu de bovenbouw in. Zij maakte handig en dankbaar gebruik van het feit dat ik alle tijd van de wereld lijk te hebben, en de begeleiding ging op afstand gewoon door. Zo nu en dan nog een gastles over een nieuw onderwerp (‘Hoe introduceer je dat?’ Even voordoen kost veel minder tijd dan omstandig uitleggen.), schoolexamens beoordelen, etc. En toen werd ze zwanger. Hoe moest dat nou met haar eerste examengroep vwo-6, wiskunde B? Het Heintje Davids-effect? De lente en de zomer zijn in aantocht en op nieuwe verplichtingen zat ik niet te wachten, maar het begon toch weer te jeuken, die klas kende ik ook al, half juni ben ik klaar, dus…

Half maart de eerste les, vanaf de eerste minuut is het weer genieten; we hebben toch echt het mooiste beroep ter wereld en omstreken en dan ook nog het mooiste vak. Voor mijn neus zeven jongens en zestien meisjes. Nog niet heel lang geleden zou je zweren dat dit een wiskunde-A groep moest zijn, gezien de samenstelling. Een zeer welwillend gezelschap, hoewel het me opvalt dat ze aan het begin van de les wel een paar volle minuten bezig zijn met een soort kringgesprek. Heel gezellig, maar daar komen we niet voor, er moet wel gewerkt worden. Dat blijkt!

De eerste dag krijg ik meteen een dikke envelop met het te corrigeren laatste schoolexamen. Dat ging voor het eerst over een groter geheel: differentiaal- en integraalrekening en gonio. Tijdens het nakijken krijg ik de schrik te pakken. Dat hadden de leerlingen tijdens het maken al meegemaakt; dit ging niet goed om het voorzichtig te zeggen. Het resultaat was ronduit bedroevend, maar daar leed de stemming nauwelijks onder. Dan ga je toch gewoon herkansen? Volgens hun kansrekening zijn er voor een dergelijke toets maar twee mogelijkheden: het gaat goed of het gaat fout. Dus één van de twee keer gaat het zeker goed. Het gemak – lees: gebrek aan goede voorbereiding, waarmee men aan herkansingen begint – doet vermoeden dat elementaire kennis van de kansrekening node werd gemist. Hoe kan dat nou?

**Voorbereiding op het CE**

Ik heb al hun vorige SE’s gezien, met de inhoud was niets mis; ze hadden zich daarop goed voorbereid, over het algemeen braaf gewerkt en ze kunnen prima met hun juf opschieten. Uit ervaring weet ik wel dat, zodra het over een grotere hoeveelheid stof gaat, het eerst tegenvalt. Maar hier is méér aan de hand. Ik zie de groep maar een paar maanden, wat zeg ik, een paar weken en kan dus moeilijk achterhalen, waar dit aan ligt.

Er komen in het curriculum veel onderwerpen aan bod, die allemaal de nodige tijd vergen. Met 3 à 4 contacturen per week is dat geen sinecure. In een beperkte hoeveelheid tijd moeten de leerlingen zich in een groot aantal onderwerpen verdiepen, en de vraag is of er voldoende tijd was om een en ander te laten beklijven en enige samenhang aan te brengen.

Lastig, maar hoe lossen we dit nu op?

Tot de laatste schooldag zijn er nog maar een paar lessen, daarna nog een paar dagen waarop de leerlingen terug moeten komen voor examentraining, en dat was het dan. Dat gaat zo niet goed, dus in overleg maar even een tiental uren extra plannen, vlak voor de meivakantie een proefexamen maken en na de meivakantie een paar dagen terugkomen. Ze voelen zelf de noodzaak ook wel, dus ze werken maar al te graag mee.

Traditioneel is zo’n proefexamen voor de leerlingen een enorme *eyeopener*: zoiets valt vies tegen. Ruim voordat de tijd nog maar half voorbij is, kijken de eersten al wanhopig om zich heen, en binnen de kortste keren volgt de rest. Er zit niks anders op dan (verplicht) doorbijten, bij het echte examen geef je ook niet op. Net als ‘vroeger’ wil ik het herexamen van het voorgaande jaar nemen, maar die vlieger gaat helaas niet op. Ach natuurlijk, het programma is gewijzigd, en dit is het eerste jaar van het vernieuwde programma! En over drie jaar gaat de boel weer op de schop; ja, ja, dat zijn leuke dingen voor de mensen. Elke keer zal het beter worden, terwijl je op je vingers kunt natellen dat de kiem voor een volgende aanpassing alweer aanwezig is. Leren we het dan nooit? (Zucht: ik kan de boel ook geen moment alleen laten…)

Gelukkig is er de *Centrale Commissie Voortentamen Wiskunde* (CCVW). Die heeft zo te zien prima, representatieve proefexamens gepubliceerd (zie: *www.ccvx.nl*). Ik maak er dankbaar gebruik van; en dankzij een goed correctiemodel kunnen de leerlingen na afloop zelf direct hun werk nakijken. De bespreking volgt daarna klassikaal. Het gemiddelde cijfer was lager dan 5! De ervaring heeft geleerd dat, na zo’n proef, op het echte examen doorgaans gemiddeld een vol punt hoger gescoord wordt. Een mens doet wat hij kan, en daarmee houdt het op.

**D-day**

Dinsdag 25 mei is D-day, ze zitten er gelukkig weer opgewekt bij. Na de openingsceremonie kijk ik het hele examen globaal door. Het maakt de indruk, dat het goed te doen moet zijn.

Weliswaar veel pagina’s, maar met een overzichtelijke lay-out. Achteraf bleek dat het wellicht een beetje (te) veel van het

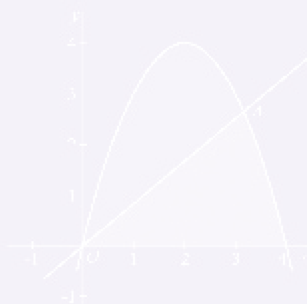
goede was. Geen van de kandidaten was op tijd klaar.
Ik ga hier niet alle vragen bespreken – dat verslag kunt u elders lezen – maar noem wel een paar dingen die me opvielen.
Bij nadere beschouwing waren er meteen bij de eerste opgave (***zie figuur 1***) al ruimschoots mogelijkheden om veel tijd te verliezen. De eerste vraag – aantonen dat de coördinaten van een snijpunt juist zijn – was een goede binnenkomer. Er kon daarbij onbekommerd door 0 worden gedeeld, en dat werd de kandidaten niet aangerekend: dit stond in de normering tussen haakjes. Dit was toch geruime tijd zo ongeveer een doodzonde? Het doet bijna pijn aan de ogen. Vervolgens moest worden aangetoond dat een oppervlakte gelijk is aan $\frac{1}{6}(4-a)^3$. Daarmee waren 6 punten te verdienen. Met behulp van integreren konden de meeste kandidaten wel komen tot:
$2(4-a)^2-\frac{1}{3}(4-a)^3-\frac{1}{2}a(4-a)^2$
Dus 4 punten verdiend, maar daarna schoten de algebraïsche vaardigheden tekort om te komen tot de vereiste vorm. Het geoefende oog ziet meteen, wat er gebeuren moet, maar hebben de leerlingen voldoende oog voor dit soort uitdrukkingen? Ook wanneer men probeerde om in beide uitdrukkingen alle haakjes weg te werken, leidde dat tot een uitgebreide exercitie, die wel veel tijdverlies, maar weinig resultaat opleverde. Slechts één leerling had het helemaal goed en een andere was er bijna uit. Was dit niet te voorzien? De gevraagde uitdrukking was natuurlijk gewenst voor de derde vraag, maar hierdoor leek deze opgave minder geschikt om even goed op gang te komen. Lag het aan dit geploeter dat de meeste leerlingen er niet meer toe kwamen om de gegeven uitdrukking bij de derde vraag te gebruiken? Driekwart modderde daar door met haakjes.

### Algebraïsche vaardigheden

Algebraïsche vaardigheden horen er nu (nadrukkelijker) bij, en van vwo-kandidaten met wiskunde B mag dit ook redelijkerwijs wel gevraagd worden. De vraag dringt zich op, of er wel voldoende tijd is om dit soort vaardigheden in voldoende mate te oefenen. En of we van mening zijn dat dit dan welbestede tijd is, want het gaat dan onherroepelijk ten koste van andere wensen. Hoe belangrijk vinden wij dit onderdeel? Opvallend is dat er met deze herleiding 2 punten te verdienen waren…

De parabool met vergelijking $y = 4x - x^2$ en de $x$-as sluiten een vlakdeel $V$ in. De lijn $y = ax$ (met $0 < a < 4$) snijdt de parabool in de oorsprong $O$ en in punt $A$. Zie figuur 1.

**figuur 1**




$A$ heeft de coördinaten $(4-a, 4a-a^2)$.

**1** Toon dit aan.

Het deel van $V$ boven de lijn $OA$ heeft oppervlakte $\frac{1}{6}(4-a)^3$.

**2** Toon dit aan.

**3** Bereken exact voor welke waarde van $a$ de lijn $y = ax$ het gebied $V$ verdeelt in twee delen met gelijke oppervlakte.

figuur 1 Uit: VWO-B 2010 (Gelijke oppervlakten)

---

In een wiskundig model van deze onderzetter worden de breedte en de dikte van de staven verwaarloosd.
Het meest linkse scharnierpunt van het model noemen we $P$, het scharnierpunt linksboven noemen we $Q$ en het midden van de middelste ruit noemen we $O$. De grootte van de binnenhoek bij $P$ in radialen noemen we $\alpha$. Zie figuur 1.

**figuur 1**




We kiezen lengte 1 voor de zijde van een ruit.
De lengte $l$ en de breedte $b$ van het model zijn functies van $\alpha$, waarbij $0 \leq \alpha \leq \pi$.

Er geldt: $l = 10\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$ en $b = 6\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$.

**4** Toon aan dat de formules voor $l$ en $b$ juist zijn.

**5** Bereken exact de waarde van $b$ als $l = 8$.

Het vervolg van deze figuur staat op pag. 37

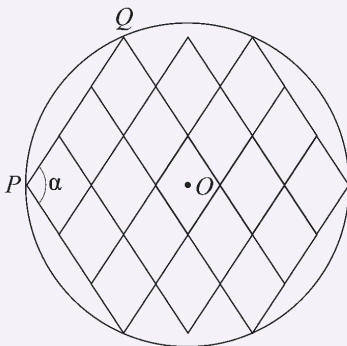
Als we $\alpha$ van 0 tot $\pi$ laten toenemen, zal $b$ toenemen en $l$ afnemen.

**6** Bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van $\alpha$ de breedte $b$ even snel toeneemt als de lengte $l$ afneemt. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Er geldt: $OQ = \sqrt{4 + 5\sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha\right)}$

**7** Toon aan dat de formule voor $OQ$ juist is.

Het model van de onderzetter kan zodanig gescharnierd worden dat zes van de acht buitenste scharnierpunten op één cirkel met middelpunt $O$ liggen.
Zie figuur 2.




**8** Bereken voor welke waarde van $\alpha$ dit het geval is. Rond je antwoord af op twee decimalen.

figuur 2 Uit: VWO-B 2010 (Onderzetter)

In het correctiemodel van het *proefexamen* van de CCVW [1] viel me op dat de vergelijking $p^2 - 2\frac{1}{2}p + 1 = 0$ werd opgelost met de *abc*-formule. Als we ons nu toch met algebraïsche vaardigheden bezighouden, is het dan niet zinvoller om te wijzen op de ontbinding $(p-2)(p-\frac{1}{2})$?
Hetzelfde, iets verderop [2], $y^2 + y - \frac{3}{4} = 0$, ook weer klakkeloos(?) de *abc*-formule in het antwoordmodel. Hier laat die commissie dan in mijn ogen zelf steekjes vallen. Als we serieus werk willen maken van algebraïsche vaardigheden, dan ook vanaf de brugklas elke mogelijkheid benutten. Als je het niet integreert in al je lessen, zal het niet het gewenste effect sorteren. Leerlingen moeten ook leren inzien dat een goede rekenvaardigheid nuttig en tijdbesparend kan zijn.
Wat dit nut betreft, is bij vraag 7 en 8 van het examen (*Onderzetter*) wellicht ook een kans níet benut. Daar werd gevraagd (***zie figuur 2***) om aan te tonen dat de gegeven formule voor $OQ$ juist was. Een reguliere vraag, waarbij een omzetting met behulp van $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ nodig was. Om het antwoord te vinden moet de straal van de cirkel (dat is de bij vraag 7 gegeven $OQ$) gelijk zijn aan de halve lengte $l = OP$. Correcte invoer in de GRM geeft dan het antwoord. In plaats van aan te tonen dat $OQ = \sqrt{4 + 5\sin^2(\frac{1}{2}\alpha)}$, had evengoed gevraagd kunnen worden naar de juistheid van $OQ = \sqrt{9 - 5\cos^2(\frac{1}{2}\alpha)}$. Je moet dezelfde (denk)stappen ondernemen, maar met de laatste formule kan in vraag 8 naar de exacte lengte van de straal van de cirkel worden gevraagd. Niet te lastige algebraïsche vaardigheid vereist, in plaats van het op knoppen drukken van de GRM. Dat is toch mooier en/of belangrijker?

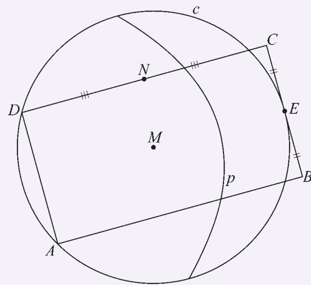
## Opwaaiend stof

Even daarvoor een paar vragen die wat stof deden opwaaien. Bijvoorbeeld: 'Bereken exact de waarde van $b$ als $l$ = 8'. Hoe moet een leerling dit interpreteren en/of wat willen wij dat de leerling gaat doen? De exacte waarde van $b$ berekenen? Op een exacte manier de waarde van $b$ berekenen? Dit laatste is de letterlijke opdracht. In beide gevallen spreekt het vanzelf dat de rekenmachine hier dus niet aan de orde is, daar bestaat geen misverstand over. Wél over de verschillende gegeven antwoorden. Het in de normering gegeven antwoord $3\frac{3}{5}$ (of het precies zo exacte 3,6 voor wie aan deze schrijfwijze de voorkeur geeft) kon op verschillende manieren worden gevonden. Een leerling die wiskundig exact de goede stappen onderneemt en komt tot $b = 6\sin(\cos^{-1}(\frac{4}{5}))$, heeft formeel aan het gevraagde voldaan: hij/zij heeft een alternatieve oplossingsmethode gehanteerd.
Zo systematisch te werk gaan dat heb ik in die paar weken nog geprobeerd te benadrukken. En als je niet verder komt, laat je je exacte(!) antwoord gewoon staan. Voordat je je GRM bij dit soort vragen aanraakt, bijt je eerst een stuk van je vinger af. De boodschap is in dit geval overgekomen, er werd redelijk op gescoord en er zijn geen bloedvlekken aangetroffen.
We zouden natuurlijk graag zien dat dit antwoord wordt vereenvoudigd tot 3,6 (zonder GRM!), maar dat wordt strikt genomen niet gevraagd! Als er één ding glashelder is, dan is het wel dat wat 'wij' onder 'bereken exact de waarde' verstaan, nog steeds niet glashelder is.
De volgende vraag (vraag 6) moest goed gelezen worden: de snelheden van de *toe*name van $b$ en de *af*name van $l$ moesten gelijk zijn (cursivering van mij). Het toe te voegen minteken in de op te lossen vergelijking $l' = -b'$ werd nogal eens vergeten. Het juiste antwoord kon dan niet meer gevonden worden vanwege het gegeven domein. Een leerling die deze route volledig correct uitwerkt, en vervolgens constateert dat het gevonden antwoord niet voldoet, laat het hart van een wiskundedocent toch sneller kloppen?! Die doet, afgezien van de fout met het minteken, toch precies, wat je met leerlingen graag wilt bereiken? Op het forum werd geopperd ook hier een (tweede) punt in mindering te brengen, 'want er was gegeven dat er een oplossing moest zijn'. Ik zou eerder geneigd zijn er in zo'n geval een bonuspunt bij op te tellen; hier gebruikt iemand zijn/haar hersens, en als je nou één ding wilt bereiken met je wiskundeonderwijs…
Bij de vragen 9 en 10 (*Aan een cirkel rakende rechthoeken*) konden de leerlingen laten zien iets van meetkunde te hebben opgestoken (***zie figuur 3***). Vraag 9 even goed lezen, en dan de vier gevraagde punten $E$ tekenen (niet construeren), was niet al te moeilijk: niveau vwo-6? Vraag 10 vereiste meer inzicht, je kon goed gebruik maken van de eigenschappen van parabool en eventueel cirkel (*Thales*). Op minstens drie



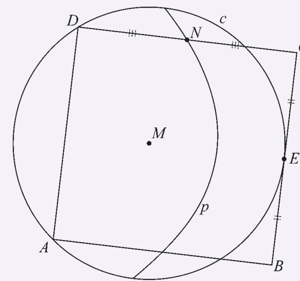
Bij een willekeurige rechthoek met hoekpunten $A$, $B$, $C$ en $D$ waarvan $A$ en $D$ op $c$ liggen en waarvan zijde $BC$ raakt aan $c$, wordt de parabool $p$ getekend met brandpunt $M$ en richtlijn de lijn $BC$.
Het midden van $CD$ noemen we $N$. Zie figuur 2.

**figuur 2**




Wanneer we $D$ over $c$ bewegen, komt er een situatie waarbij $N$ op $p$ ligt. Zie figuur 3. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

**figuur 3**



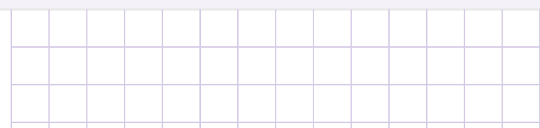

In dat geval geldt: $\angle CMD = 90°$

10 Bewijs dit.

figuur 3 Uit: VWO-B 2010 (Aan een cirkel rakende rechthoeken)



figuur 4 Uit: VWO-B 2010 (Logaritmen en vierde macht)



manieren kon het gevraagde worden aangetoond, maar helaas waren er maar weinig leerlingen, die hier uit kwamen.

## Opa vertelt

Teleurstellend, maar als je de stiefmoederlijke positie van de meetkunde in het curriculum bekijkt, niet zo verwonderlijk. Jammer van zo'n prachtig onderdeel van de wiskunde. Even uit de oude doos, opa vertelt over vroeger: in het tijdperk van wiskunde I en II kozen er ieder jaar leerlingen voor een wiskundestudie, omdat ze onveranderd enthousiast waren over het mooie (meetkunde)vak wiskunde II. Na de invoering van wiskunde A en B was het ineens afgelopen, slechts hoogst zelden kiest men nog voor een wiskundestudie. Hier laten we volgens mij mogelijkheden onbenut.

Sinds jaar en dag wordt er geklaagd over de lage instroom bij de wiskundefaculteiten. Als je kijkt naar de ontwikkelingen van de afgelopen tientallen jaren, met steeds van inhoud wisselende programma's, dan maakt het voor een aantal onderwerpen klaarblijkelijk niet zo veel uit, of ze nu wel of niet deel uitmaken van de lesstof. Deze lichting wiskunde-B kandidaten hebben bijvoorbeeld geen kansrekening en statistiek gehad. Wel een (beetje) meetkunde en dat vonden ze weliswaar lastig, maar na enige oefening wel mooi! En dat effect was altijd zichtbaar bij meetkunde, zeker ook bij nascholingscursussen voor docenten. Problemen analyseren, oplossingsstrategieën ontwikkelen, een sluitend bewijs leveren, synthetisch dan wel analytisch (algebraïsche vaardigheden!), pijnlijk netjes leren werken, nieuwe vragen stellen, allemaal prachtdoelstellingen om na te streven, ze liggen voor het oprapen. Meetkunde een 'nutteloos' vak? Je wordt voortdurend intellectueel uitgedaagd. Verder nog iets van uw dienst?

Maar ik dwaal af, terug naar het examen: een langzamerhand standaard geworden vraag om, bij vraag 16 (*Logaritmen en vierde macht*), exact de maximale lengte van een lijnstuk $AB$ te berekenen, dit keer bij twee gegeven logaritmische functies (***zie figuur 4***). Netjes differentiëren met de kettingregel leidde vrij vlot naar het goede antwoord. Deze opgave werd tot mijn vreugde goed gemaakt. Niet zo verwonderlijk, want in het proefexamen hadden ze praktisch dezelfde vraag gehad!

Aan de laatste twee vragen over *Een geodriehoek* zijn veel leerlingen jammer genoeg onvoldoende tegekomen. Hierdoor zijn onnodig mogelijkheden om punten te verdienen blijven liggen, want dit waren toch redelijke standaardvragen. Was dit misschien een betere beginvraag geweest? Even kijken en je hebt zo 8 punten in de tas.

## De tweede corrector? Dat ben je zelf!

Op naar de regionale examenbespreking, een prima service van de NVvW: ook al is het voorschrift nog zo gedetailleerd, er blijven altijd discussiepunten over. Niet alleen goed om daarover met collega's van gedachten te wisselen, maar ook om elkaar te ontmoeten, andere zienswijzen aan te horen en zeker ook om weer eens te constateren dat er niemand is die de wijsheid in pacht heeft; te beginnen bij jezelf, dan de tweede corrector, de makers van de examenopgaven, de leden van het CvE (College voor Examens). Dat kunnen we namelijk allemaal op zijn tijd zelf zijn. Een normeringsvoorschrift heeft als duidelijke bedoeling om te komen tot een uniforme beoordeling. Een volledig gelijke beoordeling is een utopie, we streven met elkaar naar het maximaal haalbare.

Na ongeveer 40 jaar examens nakijken, met bijbehorend collegiaal overleg, kan ik alleen maar met voldoening vaststellen dat er in onze kring zeer gewetensvol en verantwoord met deze materie wordt omgegaan. De examens worden gewoon goed nagekeken. Het overleg is nooit anders dan in goede harmonie afgewerkt. Een voorwaarde daarbij is dat je een open oog en oor hebt voor je collega, die niet alleen zijn/haar eigen leerlingen kent, maar ook kan toelichten wat de doelstellingen in de eigen wiskundelessen geweest zijn, en waarom dus punten wel of niet zijn toegekend.

Uiteraard zijn daarbij de normen naar letter en geest(!) leidend. Een paar opmerkingen die voorbij kwamen:

'Hé, ben jij hier ook, jij was toch al weg?'

'Ik leer mijn leerlingen altijd, dat…'

'Zo ben ik dit nog nooit tegengekomen.'

'Ik vind dit wel een of meer punten waard, maar ik twijfel, want ik weet niet wat mijn tweede corrector hiervan vindt.'

'Dit staat zo niet in de door ons gebruikte methode.' 'Niemand zal dit goed rekenen', waar bedoeld wordt dat spreker dit zelf beslist niet doet.

'Als we hier geen punt(en) voor aftrekken, dan is er toch echt sprake van niveaudaling, daar doe ik niet aan mee.' Hier sprak een jongere (kan in mijn geval al gauw) collega, die een deskundige en betrokken indruk maakte. Nu wordt er echter al een paar duizend jaar geklaagd, dat het niveau daalt; we zitten dus al ver onder het absolute nulpunt…

Ontzag voor de tweede corrector, ontzag voor het CvE, allemaal tot je dienst, maar wat is je eigen mening en waarop is die gebaseerd? Daar heb je toch goede argumenten voor? Sta open voor andere benaderingen, dan ontstaat er altijd een vruchtbaar overleg. Hoe kun je nou bij je leerlingen luikjes proberen te openen, om maar weer een andere belangrijke doelstelling te noemen, als je zelf de gordijnen gesloten houdt?

Het was weer een genoeglijke bijeenkomst, zeer aan te raden!

Ook na de eerste en tweede correctie kan ik veel waardering opbrengen voor de opstellers van dit examen. Er zat voldoende afwisseling in, er waren ruime mogelijkheden om het geleerde in praktijk te brengen en punten te scoren. Ook het niveau van de opgaven was in mijn ogen niet te hoog, dit moet toch een haalbare kaart zijn? Als dit slechte resultaten oplevert, wat is er dan aan de hand? De N-term is op dit moment nog niet bekend, maar in dit verband denk ik aan het artikel van Sieb Kemme in nummer 85-6 van *Euclides*, 'Moet dat zo?' En ik ben met hem van mening dat dit gedrocht zo snel mogelijk moet worden afgeschaft.

Ach, wat is het toch een mooi vak.

## Noten

[1] Op: *www.ccvx.nl* - Voortentamen wiskunde B van 25 januari 2010; opgave 2a.

[2] Ibidem; opgave 4a.

## Over de auteur

Heiner Wind was docent aan het Wessel Gansfortcollege in Groningen en sinds 1 januari 2008 met fpu. Hij is nu voorzitter van de redactie van *Euclides*.
E-mailadres: *hwind@home.nl*

# De grafische rekenmachine

## EVEN BIJPRATEN...

[ Simon Biesheuvel en Juan Dominguez ]

In het examen havo wiskunde B van dit jaar werd de volgende vraag gesteld:

De functie $f$ is gegeven door $f(x)=\sqrt{x^2-6x}$ voor $x \leq 0$ en voor $x \geq 6$.
Bereken met behulp van differentiëren de exacte waarde van de helling van de grafiek van $f$ in het punt met $x$-coördinaat 7.

Een leerling die goed heeft meegedaan tijdens de lessen over de kettingregel, vindt de afgeleide:

$$f'(x)=\frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x}}$$

Als vervolgens in deze afgeleide $x$ = 7 wordt ingevuld, krijg je de gevraagde helling:

$$f'(x)=\frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x}}=\frac{2{\cdot}7-6}{2\sqrt{7^2-6{\cdot}7}}$$
$$=\frac{8}{2\sqrt{7}}=\frac{4}{\sqrt{7}}$$

Deze kan eventueel verder uitgewerkt worden tot een vorm waarbij geen wortel voorkomt in de noemer:

$$\frac{4}{\sqrt{7}}=\frac{4}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}.$$

Een bewerking waarvan bekend is dat de gemiddelde 5-havo leerling het lastig vindt.

Hieronder volgt de oplossing van het merendeel van mijn leerlingen (die de kettingregel goed hadden toegepast):

$$\frac{2\times7-6}{2\times\sqrt{7^2-6\times7}} \qquad \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

JUMP DEL ▶MAT MATH

figuur 1

Deze leerlingen hebben de exacte waarde van de helling van de grafiek van $f$ in het punt met $x$-coördinaat 7, met behulp van differentiëren, uitgerekend. Dus de volle punten voor deze opgave! Dat was mijn mening.

Tijdens de centrale examenbespreking voor regiovoorzitters waren de meeste aanwezigen verbaasd over het feit dat dit op een GR die het CvE heeft goedgekeurd, mogelijk is. Iedereen was het erover eens dat, als een leerling het op deze manier gedaan heeft, hij of zij het volle aantal punten verdient. Het is aan het Cito om in de toekomst vragen te bedenken die dit soort oplossingen uitsluit, werd er vervolgens gezegd.
Bovendien heeft de leerling zich keurig aan de vraag gehouden. Hij heeft de exacte waarde met behulp van differentiëren gevonden.

We gebruiken bij ons op school de *Casio fx-9860GII* sinds het schooljaar 2009-2010. Deze rekenmachine kan naast het exact uitrekenen van wortels deze ook vereenvoudigen. Verder is het een koud kunstje van goniometrische vergelijkingen de exacte oplossingen te vinden (zie figuur 2a) of de applicatie ABC-formule de exacte wortels te laten uitrekenen (zie figuur 2b) [1]:

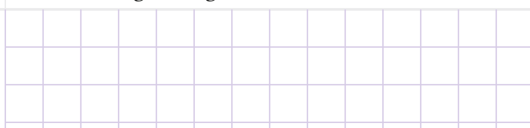
$\sqrt{250}$ → $5\sqrt{10}$
SolveN(sin X=.5,X,0,▷ → $\left\{\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi\right\}$
JUMP DEL ▶MAT MATH

figuur 2a √250 herleid en sin $x$ = 0,5 op [0, 2π]

aX²+bX+c=0
X1 [0.5261]
X2 [-4.276]
$\frac{-15+3\sqrt{41}}{8}$
REPT

figuur 2b Ingevoerd a = 2, b = 6 en c = -9

Deze nieuwe ontwikkeling gaat nog veel verder. De nieuwe modellen rekenmachines hebben de beschikking over een *flashgeheugen*. Een flashgeheugen is een permanent geheugen, het behoudt de data als de spanning wordt afgezet, en is te wijzigen. Voordat deze techniek bestond, was de firmware, het besturingssysteem van de rekenmachine, ingebakken in de hardware. Met andere woorden, je kon er niets meer aan veranderen, tenzij je de hardware veranderde.
Als *Casio* besluit om een nieuwe firmware uit te geven die extra bewerkingen mogelijk maakt, kunnen wij die op onze rekenmachines zetten en zo al deze nieuwe bewerkingen, zoals bovenstaande voorbeelden, uitvoeren.
Ook kan *Casio* besluiten om een heel nieuwe rekenmachine uit te geven die al deze nieuwe bewerkingen kan. Wat er dan gebeurt is dat mensen, zoals bijvoorbeeld Simon Lothar van *casiokingdom.org*, de nieuwe firmware van de nieuwe rekenmachine halen en geschikt maken voor de oude rekenmachine. Dit is bijvoorbeeld gebeurd met de fx-9860G. Op bovenstaande website is de firmware uit de fx-9860GII, met alle nieuwe mogelijkheden, te downloaden en op de fx-9860G te installeren. De 'oude' rekenmachine heeft nu een aantal extra mogelijkheden die hij voorheen niet had.
Stel dat de fx-9860GIII, die nog niet bestaat, een aantal bewerkingen kan uitvoeren die het CvE niet accepteert. Dit nieuwe model wordt dan dus niet door het CvE goedgekeurd.
De firmware van die *GIII* zou echter, op dezelfde manier als hierboven is beschreven, op de wél door het CvE toegestane Casio-modellen geïnstalleerd kunnen worden.
Het komt er dus op neer dat het niet zoveel zin heeft om nieuwe modellen af te keuren, als oude modellen opgekrikt kunnen worden tot dezelfde prestaties!
Aan de buitenkant ziet de GR eruit alsof hij toegestaan is. Zelfs een controle van het firmware-nummer helpt niet. Dat kan hetzelfde zijn als van een toegestaan model.
Tot nu toe werd een leerling vaak door de vraagstelling gedwongen pen en papier te gebruiken. En bij differentiëren is het regel dat geen Computer Algebra System (CAS) mag worden gebruikt. Direct een antwoord opschrijven, zonder tussenstappen, moet dan fout gerekend worden.
Voor de Casio zijn er twee applicaties (grote programma's die in het extra 1,5 MB groot geheugen worden opgeslagen) die onder andere kunnen differentiëren: CAS en Symbolix (beide zijn te downloaden via *www.casiokingdom.org*).



Ze geven soms verschillende antwoorden en dan wordt het interessant.
Als de opdracht is $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$

te differentiëren, dan lijkt het me voldoende op te schrijven:

$$f\,'(x) = \frac{(x-3)-(x+1)}{(x-3)^2} = \frac{-4}{(x-3)^2}$$

Hierin zijn geen moeilijke stappen overgeslagen. Maar de genoemde applicaties geven het volgende:

```
diff((x+1)/(x-3))
(x-3-(x+1))/(x-3)^2
calc trig abs
```

figuur 3a Applicatie CAS

```
diff((x+1)/(x-3))_
-4/((x-3)^2)
diff coef ratio prim subt ▷
```

figuur 3b Applicatie Symbolix

En dit laatste resultaat is eenvoudig over te schrijven als de afgeleide die hierboven staat.
De eerste applicatie kregen we via een collega, de tweede hadden onze leerlingen zelf op internet gevonden.
Nu wordt het toch wel lastig om – via de vraagstelling – leerlingen te dwingen *niet* de GR te gebruiken.

**Noot**

[1] Zie « *http://edu.casio.com/products/graphic/fx9860g2/* » voor alle 'nieuwe' mogelijkheden.

**Over de auteurs**
Simon Biesheuvel en Juan Dominguez zijn docent wiskunde aan het Willem de Zwijger College in Bussum.
E-mailadressen: *biesheuvel@zonnet.nl* en *j.dominguez@wdz.nl*

# Leermeester en leerling in gesprek:



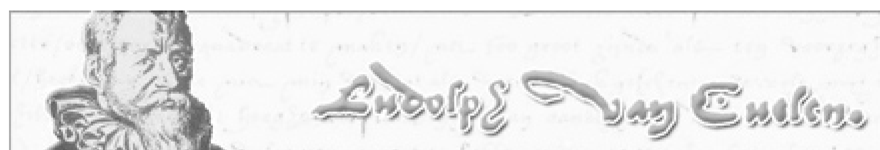
## VAN CEULEN'S EN SNELLIUS' FUNDAMENTA ARITHMETICA ET GEOMETRICA

[ Liesbeth C. de Wreede ]

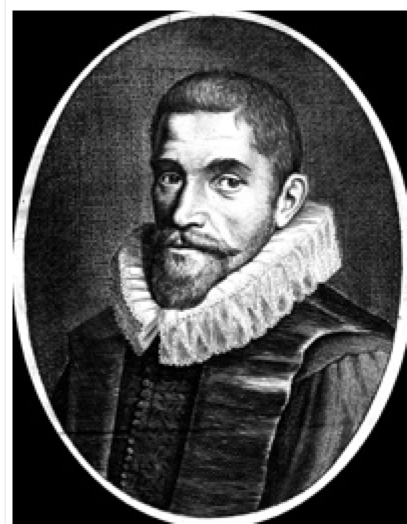
**1. Inleiding**

**1.1. Een dialoog**

De bekendste leerling van Ludolph van Ceulen, de grote rekenmeester met wie u al eerder kennis gemaakt heeft, was Willebrord Snellius. Tegenwoordig is Snellius vooral bekend vanwege zijn ontdekking van de brekingswet van licht en zijn landmeetkundige werk. Hij was echter ook geïnteresseerd in de zuivere wiskunde, vooral in het oplossen van meetkundige problemen. Van Ceulen is zijn leermeester geweest op dat gebied. Over zijn lessen en hun latere samenwerking is niet zoveel bekend. Het boek *Fundamenta Arithmetica et Geometrica* biedt ons echter toch een kijkje in hun studeerkamers. Dit werk, Snellius' vertaling en bewerking van Van Ceulen's *Arithmetische en Geometrische Fondamenten*, is een prachtige en rijke bron, niet alleen om iets te weten te komen over de meetkundige problemen waaraan Van Ceulen en Snellius samen en ieder voor zich aan werkten, maar ook voor het begrijpen van de moeilijkheden die Van Ceulen, Snellius en hun tijdgenoten ondervonden bij hun pogingen getallen en meetkundige grootheden met elkaar te verbinden.
In dit artikel zal ik eerst Snellius voorstellen en hem vergelijken met Van Ceulen, vervolgens de inhoud en bedoeling van zowel de Nederlandse *Fondamenten* als de Latijnse *Fundamenta* bespreken en dan een voorbeeld geven waaruit Snellius' en Van Ceulen's verschillende aanpak van hetzelfde probleem blijkt.[1]




**1.2. De hoofdrolspelers**



Willebrord Snel van Royen (Snellius), 1580-1626

Zowel de *Fundamenta* als de *Fondamenten* verschenen in 1615. Op dat moment was Snellius (1580-1626) buitengewoon hoogleraar in de wiskundige wetenschappen aan de Leidse universiteit, het bolwerk van laathumanistische geleerdheid. Hij was zijn vader, Rudolf Snellius, de eerste hoogleraar wiskunde aan de Leidse universiteit, opgevolgd, na jarenlang zijn assistent te zijn geweest (ook toen waren vaste aanstellingen aan de universiteit schaars). Rudolf, overleden in 1613, lijkt een bekwaam docent te zijn geweest, maar hij was geen wiskundig specialist. Dat was ook niet nodig in zijn positie: een hoogleraar was in principe een docent, geen onderzoeker. In

Leiden stond onderzoek echter in hoger aanzien dan aan andere universiteiten en de jonge (Snellius) ging meer de diepte in dan zijn vader. Daarvoor had hij niet alleen inzicht, maar ook veel kennis nodig: de wiskundige wetenschappen omvatten toen alles wat maar enigszins kwantitatief was, en Snellius publiceerde dan ook over meetkunde, rekenkunde, navigatie, landmeetkunde, astronomie en zelfs over geld uit de Oudheid.
De wiskunde was in Snellius' tijd nog heel diep geworteld in de klassieke traditie, en het kwam dus goed uit dat Snellius goed Latijn en Grieks kende en goed op de hoogte was van relevante werken uit de Oudheid. Zijn belangrijkste leermeester daarbij was Josephus Justus Scaliger geweest, een humanistisch geleerde van topniveau die helaas zijn eigen capaciteiten op wiskundig vlak schromelijk overschatte en daardoor botste met Snellius' andere leermeester, Van Ceulen.
Van Ceulen (1540-1610) was een generatie ouder dan Snellius. In tegenstelling tot Snellius had hij geen toegang tot de klassieke bronnen, omdat hij geen Latijn en Grieks kende. Dit compenseerde hij echter met grote creativiteit en een ongeëvenaarde rekenlust. Van Ceulen concentreerde zich op de zuivere wiskunde, terwijl Snellius ook de gemengde wiskunde bestudeerde (waarin voorwerpen uit de werkelijkheid geteld of gemeten worden). Beiden waren in hun tijd gerespecteerde experts, die af en toe ook voor commissies gevraagd werden. Een andere belangrijke overeenkomst tussen hen is dat beiden op de bres stonden voor goede wiskunde en publiekelijk tekeer gingen tegen wat zij onder slechte wiskunde verstonden. Terwijl Van Ceulen zich druk maakte over foutieve bepalingen van π, was Snellius vooral gespitst op het juiste gebruik van concepten, en vooral op het uit elkaar houden van meetkundige en rekenkundige grootheden.

## 2. De *Fundamenta* als weerslag van de dialoog

### 2.1. Achter de schermen

Oude boeken hebben vaak meer te vertellen dan alleen hun inhoud. Dat geldt ook voor het duo *Fondamenten*/*Fundamenta*. Beide boeken verschenen in 1615, vijf jaar na Van Ceulen's overlijden. Niet hijzelf nam dus het initiatief tot publicatie, maar zijn weduwe, Adriana Simons. Zij vroeg Snellius het werk in het Latijn te vertalen. Beiden hadden naast Van Ceulen's belang ook dat van henzelf op het oog. Simons schreef maar liefst drie opdrachtbrieven bij de *Fondamenten* aan verschillende machtige heren, in de hoop op een ruime vergoeding van hun kant. Ze wilde ook nog de Latijnse editie opdragen aan de Staten Generaal. Dit leidde tot ergernis bij Snellius, die het werk wilde opdragen aan zijn vriend en ver familielid Aemilius Rosendalius, een machtig man van wie Snellius hulp verwachtte bij het beklimmen van de carrièreladder. Snellius wilde namelijk *ordinarius* worden, gewoon hoogleraar, en hetzelfde gaan verdienen als zijn vader aan het eind van zijn leven verdiend had, geen overbodige luxe voor de huisvader van een steeds groter gezin.[2]
Zonder voorspraak van een beschermheer was het moeilijk zoiets voor elkaar te krijgen. Uiteindelijk namen zowel Simons als Snellius een opdrachtbrief in het boek op. Dit leverde Simons 72 gulden op en Snellius een promotie tot gewoon hoogleraar.

### 2.2. Vertaling of bewerking?

Beide versies van het boek moesten onder grote tijdsdruk worden afgemaakt. De uitgever maakte blijkbaar haast om het boek in de markt te zetten. Dit is te zien aan de zetfouten en andere slordigheden in beide talen. Ook moest Snellius voor zijn vertaling genoegen nemen met de figuren van het Nederlandse boek, zodat er soms Nederlandse woorden in de Latijnse editie te lezen zijn. Vervelender nog was het dat hij door dat gebrek aan nieuwe figuren zijn eigen verbeteringen en toevoegingen niet goed uit de doeken kon doen. Snellius stak zijn ergernis hierover niet onder stoelen of banken, zodat we hem bijna 400 jaar na dato nog kunnen horen mopperen op de drukkers. Hieruit blijkt wel dat hij geen onzichtbare vertaler was, maar ook zelf zijn stempel op het boek wilde drukken.
Er zijn dan ook heel wat verschillen tussen de twee edities te vinden. Snellius verbeterde een aantal foutjes in de Nederlandse versie, die waarschijnlijk door iemand met minder verstand van wiskunde dan Snellius voor de druk klaargemaakt is. Ook maakte hij alvast reclame voor zijn eigen werk. Het belangrijkste verschil tussen de Nederlandse en Latijnse editie is echter dat Snellius het boek geschikt maakte voor een internationaal geleerd publiek. Dit deed hij op drie manieren.
In de eerste plaats voegde hij een zeer geleerde opdrachtbrief toe, waarin hij op subtiele wijze liet zien dat zowel Van Ceulen als hijzelf niet 'van de straat was', maar dat hun werk in de zeer respectabele klassieke traditie paste. Hij besteedde speciaal aandacht aan de verdediging van Van Ceulen's gebruik van getallen in de meetkunde. Dit zou door de lezers gezien kunnen worden als een triviaal rekenmeesterstrucje, en daarom probeerde Snellius te laten zien dat dit wel degelijk een klassieke grondslag had.
Ten tweede reorganiseerde Snellius de inhoud van de *Fondamenten* zodat ze meer op Euclides' *Elementen* gingen lijken. Van Ceulen gaf namelijk vooral specifieke voorbeelden zonder de problemen algemeen te formuleren. Snellius formuleerde de problemen wel in algemene termen, waarbij hij dicht bij de Euclidische terminologie bleef.
Ten derde voegde Snellius op een aantal plaatsen commentaren toe aan Van Ceulen's tekst. Daar valt het boek echt te lezen als een dialoog tussen de dode Van Ceulen en de levende Snellius. Snellius vulde Van Ceulen's werk aan, bijvoorbeeld door een bewijs te geven dat Van Ceulen weggelaten had, en leverde ook kritiek, bijvoorbeeld op Van Ceulen's slordige bewijs van de Stelling van Heron. Hieronder wordt een voorbeeld van zo'n commentaar in meer detail besproken.

## 3. Optellen van segment-getal-paren

### 3.1. Getallen in de meetkunde: obstakels

In de tijd van Snellius en Van Ceulen was het oplossen van meetkundige problemen een populaire bezigheid onder wiskundigen. Sommigen van hen maakten gebruik van getallen en algebra. Dit was controversieel, omdat Snellius en andere tijdgenoten bezwaren hadden tegen het koppelen van een getal aan een lijnsegment of oppervlakte. Voor moderne lezers, gewend als we zijn aan analytische meetkunde, is die huivering moeilijk na te voelen. Toch hadden de scrupuleuze vroegmoderne wiskundigen wel een punt.[3]
Hun belangrijkste moeilijkheden waren de volgende:

1. Getallen werden traditioneel niet gebruikt in de meer theoretische meetkunde, wat tot een zeker argwaan leidde bij die wiskundigen die sterk aan de klassieke traditie hingen.
2. Er was geen natuurlijke kandidaat voor de eenheid in de meetkunde, dat wil zeggen een lijnstuk met dezelfde functie als het getal 1.
3. In de rekenkunde ontbreken dimensies. Om die reden kun je zo veel getallen met elkaar vermenigvuldigen als je wilt,

figuur 1 Uit: Van Ceulen's *Fundamenta Arithmetica et Geometrica*

en het resultaat is dan nog steeds een getal. In de meetkunde is rechthoekvorming de operatie die het dichtst bij vermenigvuldigen in de buurt komt. Die operatie vermeerdert echter het gevormde object met telkens een dimensie. Aangezien een object van meer dan drie dimensies onvoorstelbaar was in de klassieke meetkunde, was dit een serieus probleem.

4. Het incommensurabiliteitsprobleem: alleen als twee lijnsegmenten commensurabel zijn – dat wil zeggen dat er een grootheid bestaat waarvan ze beide veelvouden zijn – kunnen ze beide door een rationaal getal worden uitgedrukt. Het was niet duidelijk hoe het verband tussen incommensurabele grootheden kon worden uitgedrukt.
5. Goede bewijstechnieken ontbraken in de arithmetica, wat deels veroorzaakt werd door de afwezigheid van het concept van een onbepaald getal.

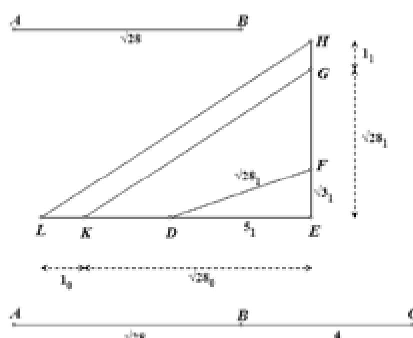
Deze bezwaren werden vaak niet expliciet opgeschreven door vroegmoderne wiskundigen, maar werden wel gevoeld. Laten we kijken hoe Van Ceulen en Snellius probeerden iets daarvan aan te pakken.

### 3.2. Getallen in de meetkunde: oplossingen

Van Ceulen legde in de *Fondamenten* uit hoe je kunt optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met paren van een lijnsegment en een getal. Als voorbeeld beschouwen we zijn optelling van twee van zulke paren; ***zie figuur 1***.[4] Wat wel en geen getal is, wordt niet expliciet gedefinieerd; impliciet worden alleen gehele getallen, breuken en (samengestelde) vierkantswortels als getallen beschouwd, alle positief. Als een eenheidslijnsegment gegeven is, kunnen lijnsegmenten van al deze lengtes met alleen passer en liniaal, de voorkeursinstrumenten van de meetkundige, geconstrueerd worden. Van Ceulen laat hier in feite het tegenovergestelde zien: hoe een eenheidsmaat te construeren op basis van een lijnstuk waarvan de lengte gegeven is als getal. Het probleem is als volgt:

**Probleem 1**. *Gegeven een lijnstuk AB waarvan gegeven is dat de lengte* $\sqrt{28}$ *is. Construeer een lijnstuk AC met lengte* $\sqrt{28}$ + 4.

Dit probleem ziet er misschien eenvoudig uit, maar het is helemaal niet triviaal. Het zou triviaal geweest zijn als Van Ceulen gevraagd had twee lijnsegmenten samen te voegen, of twee getallen bij elkaar op te tellen, of die som te benaderen met behulp van een breuk. Hier echter wordt het antwoord gegeven door een met passer en liniaal geconstrueerd lijnsegment, maar het is toch geen klassiek meetkundig probleem omdat getallen een essentiële rol spelen in de opgave. De moeilijkheid zit erin dat je wel een lijnstuk van $\sqrt{28}$ hebt, maar niet van 1 (of een andere rationale lengte), wat het lastig maakt een lijnstuk van lengte 4 te construeren. Van Ceulen pakt dit aan door een hulpeenheid te introduceren en op basis daarvan een eenheid te construeren op dezelfde schaal als de gegeven $\sqrt{28}$. Voor moderne lezers is het handig de eenheid waarin $\sqrt{28}$ uitgedrukt wordt, van deze hulpeenheid te onderscheiden in de notatie. We noemen ze respectievelijk $1_0$ en $1_1$. Van Ceulen maakt dit expliciete onderscheid niet.




figuur 2 Van Ceulen: optellen van lijnstukken

Zijn oplossing ziet er als volgt uit (***zie figuur 2***).

**Constructie.**

1. Trek een lijnsegment *DE* van willekeurige lengte; noem dit 5 eenheden (dit zijn hulpeenheden, dus $5_1$).
   Construeer een lijnsegment *EF* van lengte $\sqrt{3}_1$ loodrecht op *DE* door *E*. (Van Ceulen legt niet uit hoe je *EF* moet vinden. Je kunt dit bijvoorbeeld doen door de stelling van Pythagoras toe te passen op een rechthoekige driehoek met aanliggende zijde $1_1$ en schuine zijde $2_1$; de overstaande zijde heeft dan lengte $\sqrt{3}_1$.)
2. Verbind *D* en *F*; deze schuine zijde heeft lengte $\sqrt{28}_1$.
3. Verleng *EF* tot *G* zodat EG = $\sqrt{28}_1$. Verleng *EG* tot *H* zodat *GH* = $1_1$.
4. Verleng *ED* tot *K* zodat *EK* = *AB* = $\sqrt{28}_0$. Construeer de driehoek *GEK*.
5. Construeer een lijn parallel aan *GK* door *H*; noem het snijpunt met het verlengde van *EK L*. Nu geldt *KL* = $1_0$.
6. Verleng *AB* met vier keer *KL* tot *C*. *AC* lost het probleem op.

Het bewijs volgt direct uit de gelijkvormigheid van de driehoeken *KEG* en *LEH*, die impliceert dat $EG : GH = EK : KL = \sqrt{28}_1 : 1_1 = \sqrt{28}_0 : 1_0$.

Hoewel de constructie zelf eenvoudig is, is er toch één complicatie: het is niet altijd eenvoudig om een gegeven getal (in dit geval $\sqrt{28}$) in een eindig aantal stappen te 'ontbinden' in eenheden via het herhaald toepassen van de stelling van Pythagoras en de constructie van rechthoekige driehoeken met behulp van passer en liniaal. Een vaardig breukenrekenaar als Van Ceulen zag natuurlijk direct welke combinaties voor de hand lagen, maar dat gold niet voor al zijn lezers.

Snellius stelde dan ook een andere oplossing voor, die deze moeilijkheid niet bevatte en waarvoor hij ook geen hulpeenheid hoefde te introduceren. Hij stelde voor om de middenproportionaal tussen $\sqrt{28}$ en $\frac{1}{28}\sqrt{28}$ te construeren. Dit is de eenheid, omdat $\sqrt{28}:1=1:\frac{1}{28}\sqrt{28}$. Hoe de middenproportionaal van gegeven lijnstukken bepaald kon worden, was te vinden in Euclides' *Elementen*, VI-13.

Snellius beval zijn eigen oplossing aan als een 'zeer elegante en erg makkelijke methode', die kon helpen Van Ceulen's omslachtige methode te omzeilen. Hij eindigde echter bescheidener door op te merken dat de lezer zelf uit moest maken welke van de twee methodes het handigste

was. Op grond van de aangedragen voorbeelden is dit eigenlijk niet mogelijk. Van Ceulen en Snellius generaliseren beiden niet, maar geven alleen voorbeelden met concrete getalwaarden. Welk van de twee methoden makkelijker is, hangt erg van het concrete probleem af. Uiteindelijk gaat het hun beiden niet om snelheid, maar om de principiële oplossing van een theoretisch probleem: is het mogelijk exacte constructies uit te voeren met segment-getal-paren? Het antwoord is voor beiden ja. De constructies hoefden dan niet feitelijk steeds uitgevoerd te worden in nieuwe problemen. De lezer mag uitmaken welke methode hij of zij het 'elegantst' vindt, dat antwoord ligt niet in de wiskunde besloten.

## 4. Conclusie

Van Ceulen en Snellius vertegenwoordigen verschillende scholen in de vroegmoderne wiskunde: Van Ceulen was een rekenmeester, Snellius een academisch/humanistisch wiskundige. Ze kwamen elkaar tegen in hun belangstelling voor meetkunde. Daarin legden ze echter andere accenten, zoals heel duidelijk blijkt uit hun beider inbreng in de *Fondamenten/Fundamenta*. Van Ceulen pakte nieuwe problemen aan, die hij creatief oploste. Hij rekende graag met ingewikkelde wortels. Snellius was wat voorzichtiger, hij vond het belangrijk dat de grondslagen van de meetkunde niet in gevaar kwamen door innovaties. Bovendien was hij, doordrongen van humanistische geleerdheid vanaf zijn vroegste jeugd, meer gehecht aan de traditionele Euclidische benadering van de meetkunde. Ook moest hij rekening houden met zijn collega's aan de Leidse universiteit, waar zijn positie nog niet zeker was. Snellius diende dan ook zowel Van Ceulen's als zijn eigen belang door geen letterlijke vertaling van diens werk te maken, maar het werk te verbeteren en uit te breiden. Van deze dialoog tussen leermeester en leerling kunnen wij 400 jaar later nog steeds meegenieten.

## Noten

[1] Dit artikel is gebaseerd op [g]. Voor meer achtergrondinformatie en andere voorbeelden van de dialoog Snellius-Van Ceulen zie mijn proefschrift [f].

[2] Volgens de meeste literatuur hadden Snellius en zijn vrouw achttien kinderen, maar die heb ik niet teruggevonden in de archieven. Daar zijn sporen van zeven kinderen te vinden; zie [f; pp. 65-66].
We zijn op de hoogte van Snellius' ergernis en zijn hulpverzoek aan Rosendalius dankzij een overgeleverde brief van Snellius, die zich nu in de universiteitsbibliotheek van Utrecht bevindt; zie [a].

[3] Voor meer achtergrondinformatie en scherpe analyses zie [d].

[4] Zie [b; pp. 132-134] en [c; pp. 106-109].
Dit voorbeeld is ook heel geschikt om in de klas te behandelen. Zie de mooie uitleg en opgaven in [e; pp. 13-16]; in het boekje worden ook aanverwante onderwerpen behandeld.

## Bibliografie


**Manuscripten**

[a] W. Snellius (1615?): *Brief aan Aemylius Rosendalius (quamvis)*. UBU HS 986/7.A.26, Aem. et Jac. Rosendalius fratres, Epistolae autographae et epistolae diversorum ad eosdem, cum carminibus nonnullis, Thesibus ab iis defensis, cet., 1574-1616, fol. 224r–v.

**Primaire bronnen**

[b] L. van Ceulen (1615): *De Arithmetische en Geometrische fondamenten, Met het ghebruyck van dien in veele verscheydene constighe questien, soo Geometrice door linien, als Arithmetice door irrationale ghetallen, oock door den regel Coss, ende de tafelen sinuum ghesolveert*. By Ioost van Colster, ende Iacob Marcus, Tot Leyden.

[c] L. van Ceulen (1615): *Fundamenta Arithmetica et Geometrica cum eorundem usu In variis problematis, Geometricis, partim solo linearum, ductu, partim per numeros irrationales, et tabulas sinuum, et Algebram solutis. Authore Ludolpho a Ceulen Hildesheimensi. E vernaculo in Latinum translata a Wil. Sn. R. F.* Apud Iacobum Marcum Bibliopolam, Lugduni Batavorum.

**Secundaire literatuur**

[d] H.J.M. Bos (2001): *Redefining Geometrical Exactness / Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*. New York: Springer (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences).

[e] M. de Nijs, S. Wepster (2010): *Meester Ludolphs Koordenvierhoek*. Utrecht: Epsilon Uitgaven (in samenwerking met de NVvW); te verschijnen.

[f] L.C. de Wreede (2007): *Willebrord Snellius (1580-1626): a Humanist Reshaping the Mathematical Sciences*. Proefschrift Universiteit Utrecht (*zie http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2007-0925-200740/*).

[g] L.C. de Wreede (2010): *A dialogue on the use of arithmetic in geometry: Van Ceulen's and Snellius's Fundamenta Arithmetica et Geometrica*. In: *Historia Mathematica* 37(3); te verschijnen.


## Over de auteur


Liesbeth de Wreede werkt als biostatisticus in het Leids Universitair Medisch Centrum. Daarnaast is ze historicus van de wiskunde, gepromoveerd op een proefschrift over Willebrord Snellius.
E-mailadres: *L.C.deWreede@uu.nl*

# Op weg naar IMO2011

## IMO2005 - OPGAVE 4



[ Sietske Tacoma ]

**Van 13 t/m 24 juli 2011 vindt voor het eerst in de geschiedenis in Nederland de Internationale Wiskunde Olympiade (International Mathematical Olympiad, IMO) plaats. Zo'n 600 leerlingen uit meer dan 100 landen zullen dan twee dagen lang in Amsterdam hun tanden zitten in een zestal zeer pittige wiskundeopgaven. Opgaven waaraan ook beroepswiskundigen vaak nog een flinke kluif hebben. Hoe zien die opgaven er eigenlijk uit? En wat trekt de deelnemers hierin zo aan? Om dat te ontdekken treft u in de komende nummers van Euclides elke keer een IMO-opgave uit het verleden aan, besproken door een leerling die indertijd in het Nederlandse team zat.**

In de zomer van 2005 zat ik, samen met vijf anderen, in het Nederlandse team voor de IMO in Mérida in Mexico. Voor de derde keer zaten er twee meisjes in het Nederlandse team en een medaille voor een meisje moest er nu maar eens van komen, vonden we. Van de zes opgaven die we voorgeschoteld kregen, wist ik er één volledig op te lossen. Het aantal punten dat ik had, was uiteindelijk, net als voor twee meisjes die eerder mee waren geweest, één punt te weinig voor een bronzen medaille. Toch was ik erg blij dat ik een opgave had opgelost. Dat vindt men namelijk op een IMO al zo'n goede prestatie dat er een eervolle vermelding tegenover staat. De opgave die ik heb opgelost, zal ik in dit artikel bespreken.

### De opgave

Beschouw de rij $a_1$, $a_2$, ... die gegeven is door:

$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ (met $n = 1, 2, \ldots$)

Bepaal alle positieve gehele getallen, die relatief priem zijn met iedere term van de rij.

Het eerste wat ik wilde doen bij het zien van deze opgave, is de eerste termen van de rij uitschrijven, om te kijken hoe die getallen eruit zagen. De eerste vijf termen zijn: $a_1 = 10$, $a_2 = 48$, $a_3 = 250$, $a_4 = 1392$ en $a_5 = 8050$. De getallen worden snel groter en moeilijker uit te rekenen zonder rekenmachine. Om hier wat zinnigs over te kunnen zeggen is het een goed idee om beter te bekijken waar precies om wordt gevraagd.

Er wordt gevraagd naar positieve gehele getallen die relatief priem zijn met alle termen in de rij. Twee getallen zijn *relatief priem*, als geen van de priemfactoren van het ene getal ook een priemfactor is van het andere getal. Dit betekent dat bijvoorbeeld de getallen 2, 5 en 10 al afvallen, omdat deze getallen allemaal één of meer priemfactoren gemeen hebben met $a_1 = 10$. Maar dan kunnen alle veelvouden van 2 ook niet meer, want die hebben ook een priemfactor met 10 gemeen. Net zo vallen alle veelvouden van 5 af, want ook die zijn niet relatief priem met 10.

Als een priemgetal dus een deler is van een term in de rij, dan valt dit priemgetal af, samen met al zijn veelvouden. Deze veelvouden hebben immers allemaal een priemfactor gemeen met minstens één term in de rij. Samengestelde getallen die relatief priem zijn met alle termen in de rij, kunnen dus alleen maar zijn samengesteld uit priemfactoren die relatief priem zijn met alle termen van de rij. Daarom kunnen we ons eerst beperken tot zoeken naar priemgetallen die relatief priem zijn met alle termen van de rij.

Voor priemgetallen is het makkelijker om vast te stellen of ze relatief priem zijn met andere getallen. Als een priemgetal $p$ en een ander getal $a$ niet relatief priem zijn, dan heeft $a$ een priemfactor $p$, dus is $a$ deelbaar door $p$. We zijn dus op zoek naar priemgetallen waardoor geen enkele term in de rij deelbaar is.

Als we nu eens kijken naar de eerste vijf termen van de rij, dan zien we dat $a_1$ en $a_3$ deelbaar zijn door de priemgetallen 2 en 5, $a_2$ door 2 en 3, $a_4$ door 2, 3 en 29 en $a_5$ door 2, 5, 7 en 23. De vier kleinste priemgetallen vallen dus al af. Bij het maken van zo'n opgave is dat het moment waarop je begint te hopen dat alle priemgetallen afvallen, dus dat er voor elk priemgetal $p$ wel een term in de rij is die deelbaar is door $p$.

Om dat te bewijzen hebben we een goed idee nodig. Nu begint de rij bij $a_1$. Maar we kunnen ook eens kijken wat er gebeurt als we terug gaan rekenen. Wat zou $a_0$ zijn? En wat $a_{-1}$?

Dit principe van 'thinking out of the box' is mij aangeleerd door onze begeleider. In het vliegtuig op de heenreis moedigde hij ons aan stout en ondeugend te zijn, want stoute en ondeugende jongens en meisjes lossen meer problemen op dan brave en nette jongens en meisjes. Dat betekent dat het geen probleem is om de 'regels' van de opgave te overtreden om goede ideeën te krijgen, zolang je je voor de uiteindelijke oplossing maar wél aan de regels houdt.

Terug naar de opgave: het plan was om $a_0$ uit te rekenen. Dat geeft ons:

$a_0 = 1 + 1 + 1 - 1 = 2$

Dit levert weinig op, dus gaan we nóg een stapje terug:

$a_{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1 = 0$

Toen ik hier tijdens de wedstrijd achter kwam, had ik het idee dat dit een hint kon zijn in de richting van een goede oplossing. Daarnaast heb ik nog eens goed gekeken of de rij inderdaad bij $a_1$ begon en niet bij $a_{-1}$. Dan was ik klaar geweest, 0 is immers deelbaar door elk getal, dus dan zou er geen enkel priemgetal relatief priem zijn met elk getal in de rij. In de opgave stond echter dat de rij écht bij $a_1$ begon, dus er moest nog wat gebeuren.

Om een volgende stap te maken gaan we op zoek naar stellingen die ons kunnen helpen. Ik mag dan volgens de opgave niet naar getallen tot de macht -1 kijken, maar wel naar getallen tot de macht $(p - 1)$, met $p$ een willekeurig priemgetal. En daar helpt de *Kleine stelling van Fermat* ons verder. Deze stelling luidt:

*Zij $p$ een priemgetal en $n$ een natuurlijk getal dat niet deelbaar is door $p$. Dan geldt*:

$n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ Met behulp van deze stelling vinden we voor $a_{p-1}$ het volgende:

$$a_{p-1} = 2^{p-1} + 3^{p-1} + 6^{p-1} - 1$$
$$\equiv 1 + 1 + 1 - 1 \equiv 2 \pmod{p} \quad \text{voor } p > 3.$$

Dit helpt ons niet verder. Maar we hadden eerder wel gevonden dat $a_0 = 2$ en toen hielp het om nog een stapje terug te gaan. Dat kunnen we hier ook doen, dan vinden we:

$$a_{p-2} = 2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1$$

Om hierover meer te kunnen zeggen met de Kleine stelling van Fermat kunnen we dit schrijven als:

$$a_{p-2} = 2^{p-1} \cdot 2^{-1} + 3^{p-1} \cdot 3^{-1} + 6^{p-1} \cdot 6^{-1} - 1$$

want dan vinden we dat:

$$a_{p-2} \equiv 2^{-1} + 3^{-1} + 6^{-1} - 1 \pmod{p}$$

Om niet te hoeven rekenen met breuken modulo $p$ kunnen we de vergelijking met 6 vermenigvuldigen. Voor $p > 3$ staat er dan modulo $p$:

$$\begin{aligned} 6 \cdot a_{p-2} &\equiv 3 \cdot 2^0 + 2 \cdot 3^0 + 6^0 - 6 \\ &\equiv 3 + 2 + 1 - 6 \equiv 0 \end{aligned}$$

Dat betekent dat $6a_{p-2}$ deelbaar is door $p$ voor alle priemgetallen $p$ groter dan 3. Omdat $p$ geen deler is van 6, is dan $a_{p-2}$ deelbaar door $p$. Dit is een belangrijk resultaat voor het oplossen van de opgave!
Om te kunnen vaststellen of we geen foutjes hebben gemaakt, is het een goede gewoonte het resultaat te controleren voor een paar kleine gevallen. Omdat $p$ groter moet zijn dan 3, kunnen we controleren of $a_3$ deelbaar is door 5; dat is het geval. We hebben ook gezien dat $a_5$ deelbaar is door 7, dus ook voor het priemgetal 7 klopt ons resultaat.

We concluderen dat geen van de priemgetallen groter dan 3 voldoet; elk priemgetal $p$ groter dan 3 heeft een veelvoud in de rij, namelijk $a_{p-2}$. Ook van 2 en 3 hadden we al vastgesteld dat ze niet voldeden. Omdat geen enkel priemgetal voldoet, voldoet ook geen enkel samengesteld getal.
Momenteel hebben we zes van de maximaal zeven punten binnen voor deze opgave. Het zevende punt krijgen we door het *goede antwoord* te geven. Er is namelijk wél een getal dat relatief priem is met alle termen in de rij. Dat getal is het getal dat geen enkele priemfactor heeft: het getal 1.
Dus: 1 is het enige getal is dat relatief priem is met elke term in de gegeven rij. En daarmee hebben we de opgave opgelost.

Wat ik leuk vind aan deze opgave, en aan opgaven van de IMO in het algemeen, is dat je geen enorm ingewikkelde stellingen nodig hebt om de opgave te bewijzen. Er komt wat voorkennis bij kijken: over modulo-rekenen, deelbaarheid en de Kleine stelling van Fermat. Dit zijn onderwerpen die ik tegenwoordig als trainer uitleg aan de leerlingen die nu in de race zijn voor het Nederlandse team. Daarin leer ik de leerlingen, samen met mijn medetrainers, ook dat het bij olympiade-opgaven minstens zo belangrijk is om creatief te zijn, zoals bijvoorbeeld in *mijn* opgave door te kijken naar $a_{p-2}$. Díe creatieve inzichten zijn wat de olympiade voor mij nog steeds zo leuk en uitdagend maakt!


**Over de auteur**
Sietske Tacoma zat in 2004 en 2005 in het Nederlandse team voor de IMO. Sinds november 2007 is ze betrokken bij de training van de nieuwe kandidaten voor het team. In de zomer van 2011 zal ze vice-teamleider van het Nederlandse team zijn. In 2010 is ze, om ervaring op te doen, al mee geweest naar de IMO in Kazachstan. Daarnaast is ze meerdere keren betrokken geweest bij de Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade (LIMO), als deelnemer, corrector en in 2010 als organisator. Ze is bijna klaar met haar master *Research and Development in Science Education* aan de Universiteit Utrecht.
E-mailadres: *sietsketacoma@gmail.com*

# Vanuit de oude doos

[ Ton Lecluse ]

**Ton Lecluse is docent wiskunde en heeft een doos met oude schoolboeken uit de vorige eeuw, waar hij graag in neust. Hij vindt vaak mooie opgaven (zonder uitwerking gelukkig) die hem uitdagen een oplossing te zoeken die past in het huidige curriculum. In de rubriek 'Vanuit de oude doos' wordt in elke aflevering een juweeltje behandeld. U kunt er uw lessen mee verrijken!**

## Drie opgaven

We kijken naar opgaven uit 1925.

**Opgave 1.** Deze opgave kan in de categorie *trigonometrie* (= goniometrie in driehoeken) geplaatst worden. Dus toch ook nog een stukje meetkunde!

In driehoek $ABC$ trekt men vanuit $A$ de zwaartelijn $AE$ en de hoogtelijn $AD$. Als nu het oppervlak van driehoek $ADE$ de helft is van dat van driehoek $ABE$, bereken dan de hoeken van de driehoek als bovendien gegeven is $\angle B + \angle C = 135°$.

Een werktekening:




figuur 1

De oplossing staat verderop.

**Opgave 2.** Nu een vraagstuk uit hetzelfde jaar op algebragebied, een 'eenvoudige' binnenkomer.

Van de vergelijking:
$ax^3 + ax^2 – 4bx + b^2 = 0$
is een wortel -6, het product der beide andere wortels is 6.
Bepaal $a$ en $b$ en de beide andere wortels.

**Opgave 3.** Tot slot een opgave met *log* en *rijen* (hier heten ze nog reeksen; [red.]), voor onze wiskunde-A leerlingen.

De eerste, zevende en vijfentwintigste term van een rekenkundige reeks vormen een meetkundige reeks.
De som der logaritmen van de termen dezer meetkundige reeks is $\frac{9}{2}$ maal de logaritme van de eerste term.
Geef de vijf eerste termen van de rekenkundige reeks.

### Oplossingen

**Opgave 1**

- De oppervlakte van driehoek $ADE$ is de helft is van die van driehoek $ABE$; dus is $D$ het midden van $BE$.
- Stel $BD = DE = 1$, dan is $CE = 2$.
- Voorts: $\tan\angle B = AD$ en $\tan\angle C = \tan(135° – \angle B) = AD/3$; dus: $\tan(135° – \angle B) = (\tan\angle B)/3$
- Kent u de somformules van $\tan(\alpha + \beta)$ nog? Dan kunt u deze laatste uitdrukking herschrijven tot:
  $$\frac{\tan 135° - \tan\angle B}{1 + \tan 135° \cdot \tan\angle B} = \frac{\tan\angle B}{3}$$
- Stel $\tan\angle B = x$, dan krijgen we de vergelijking:
  $$\frac{-1 - x}{1 - x} = \frac{x}{3}$$
- De positieve oplossing van deze vergelijking is $x = 2 + \sqrt{7}$.
  Dus $\angle B = 77{,}8524° = 77°51'9''$, met $\angle C = 57{,}1476° = 57°8'51''$ en $\angle A = 45°$.
- De negatieve oplossing van deze vergelijking is $x = 2 – \sqrt{7}$.
  Dus $\angle B = 147{,}1476° = 147°8'51''$. Maar deze vervalt: de waarde is te groot.

De uitdaging voor de leerling is hier dat enkele niet alledaagse, maar eenvoudige stappen genomen moeten worden. Ook de somformule voor $\tan(\alpha + \beta)$ moet even worden afgeleid, een kleine oefening apart, denk ik.

**Oplossing van opgave 2**

- Van de kwadratische vergelijking $x^2 + px + q = 0$ is $-p$ de som en $q$ het product van de wortels; dus is het linkerlid van de gegeven vergelijking deelbaar door: $x^2 + px + 6$
- Het linkerlid is ook deelbaar door $(x + 6)$, dus is de vergelijking equivalent met: $(x + 6)(x^2 + px + 6) = 0$
- Uitwerken geeft:
  $x^3 + (p + 6)x^2 + (6 + 6p)x + 36 = 0$
- Vergelijk nu de coëfficiënten van deze vergelijking met de overeenkomstige van de gegeven vergelijking. Dan moet gelden:
  $1 = a$, $p + 6 = a$, $6 + 6p = -4b$, $36 = b^2$
- Dus: $a = 1$, $b = 6$.
- Waaruit eenvoudig volgt dat de andere wortels van de vergelijking gelijk zijn aan 2 en 3.

**Oplossing van opgave 3**

- Stel de eerste term is gelijk aan $a$ en verschil is $v$. Dan krijgen we:
  $$\frac{a + 6v}{a} = \frac{a + 24v}{a + 6v}$$
  Waaruit volgt: $(a + 6v)^2 = a(a + 24v)$
- Uit het tweede gegeven volgt:
  $$\log a + \log(a + 6v) + \log(a + 24v) = \\ = \tfrac{9}{2}\log a$$
- Dus: $a(a + 6v)(a + 24v) = a^{\frac{9}{2}}$.
- Combineer je deze twee resultaten, dan krijg je: $(a + 6v)^3 = a^{\frac{9}{2}}$.
  Waaruit volgt: $v = \frac{a}{6}(\sqrt{a} - 1)$.
- Eliminatie van $v$ geeft $a = 4\sqrt{a} - 3$, waaruit volgt:
  $a = 9$, $v = 3$ óf $a = 1$, $v = 0$
- De tweede oplossing vervalt. Dus is het antwoord: 9, 12, 15, 18, 21.

**Bron**

Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgevers-maatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

**Over de auteur**

Ton Lecluse is docent wiskunde aan het Vathorst College te Amersfoort.
E-mailadres: *alecluse@casema.nl*

# Wiskunde D, wat moet ik er mee

## COLUMN UITGESPROKEN OP DE WISKUNDE D-DAG, 4 JUNI 2010

[ Christiaan Boudri ]

De titel van deze column is: Wiskunde D, wat moet ik er mee. Punt. Of een vraagteken? Of een uitroepteken?
Een uitroepteken past bij een scholier die niet van wiskunde houdt, die toch geen studie kiest waarbij veel wiskunde nodig is. Of die twijfelt tussen techniek en geneeskunde. Is het vak biologie dan niet veel beter dan wiskunde D, waarmee je je toch vooral lijkt vast te leggen op een toekomstig technisch beroep? Lastig, en ook niet altijd gewenst, om zo'n leerling te overtuigen.
Een vraagteken past bij een scholier die wil weten wat vanuit vervolgopleidingen of het latere beroep wordt geëist. Heb ik het nodig, is de vraag. Zo'n leerling is gevoelig voor geluiden die uit het ho of de beroepswereld doorklinken. En deze geluiden zijn, zoals we weten, niet erg positief. Geen enkele opleiding raadt wiskunde D aan, laat staan dat het vereist is. In de landelijke opleidingseisen komt wiskunde D niet voor.

### Toestand aan vwo en havo

Nu valt het voor het vwo nog wel mee. Er is een behoorlijke samenwerking ontstaan tussen vo en universiteiten op vwo-niveau. Iedere zichzelf respecterende universiteit heeft een steunpunt wiskunde. In samenwerking hiermee zijn intussen tal van interessante wiskundemodules ontwikkeld. De noodzaak voor degelijker exact onderwijs was ook door studenten middels de actiegroep Lieve Maria duidelijk gemaakt in 2006, en heeft geleid tot een bijstelling van de plannen voor de vernieuwde Tweede fase. Het signaal dat een goede wiskundebasis essentieel is voor een technische of natuurwetenschappelijke studie, sijpelt hier wel door naar de leerling.
Anders is het voor het havo. De exacte cijfers voor dit jaar zijn niet bekend, maar na de lancering in 2007 bleek dat slechts 50% van de havo-scholen wiskunde D aanbood, en dat op 5% van de scholen niet eens wiskunde B werd aangeboden in het NG-profiel! Niet meer dan 3% van de havisten koos wiskunde D, tegen 12% dat voorheen wisB12 had gekozen. Wel was de keuze voor NG of NT gestegen van 27% naar 34%, maar het aantal leerlingen dat wiskunde B koos, daalde van 30% naar 26%.[1]

### Toestand aan het hbo

Voor het havo kan veel minder worden gerekend op ondersteuning vanuit het hbo. Het begint al met het probleem dat er nauwelijks meer echte wiskundedocenten aan het hbo over zijn. Met de invoering van het competentiegericht leren (CGL) enkele jaren geleden is de nadruk komen te liggen op praktische kennis en vaardigheden.
Van vakdocenten werd plotseling gevraagd over het hele beroepsveld te kunnen meepraten en begeleiding te kunnen geven. Praktijkervaring, daar draaide het om. Voor wiskundedocenten betekende dit vaak dat ze richting vut of anderszins werden gedirigeerd.
Inmiddels is het tij wel enigszins gekeerd en wordt de waarde van een stevige theoretische ondergrond wel weer onderkend, maar een goed opgeleide wiskundedocent zal nog altijd niet snel emplooi vinden aan het hbo. Tenzij hij/zij een link kan leggen met het beroepsveld door opleiding of ervaring. Of tenzij hij/zij statistiek geeft, want dat laten technici en economen nog altijd graag over aan specialisten.

### Gevolgen voor wiskunde D aan het havo

Dit gebrek aan wiskundedocenten aan het hbo uit zich onder meer in de trage ontwikkeling van modules voor wiskunde D voor het havo. Het klinkt zo mooi: 'Domein E: Wiskunde in Technologie', bestaande uit onderwerpen die door het hoger onderwijs worden aangeboden. En het is ook vreemd: er zijn meer dan voldoende natuurwetenschappelijke en technische onderwerpen te vinden met een verbredende of verdiepende wiskundige component. De weinige modules die tot nog toe zijn ontwikkeld, hadden echter veelmeer een alfa- of gamma-inslag: Lenen of Sparen; Beslissen; Logica; Kansrekening; Statistiek. En dan nog deels vanuit de universiteit ontwikkeld in plaats van vanuit het hbo. Niets ten nadele hiervan, maar waar blijft de techniek?
De module over tandwielen en overbrengingen die Henk Reuling heeft gepresenteerd, is er een voorbeeld van dat ook de harde techniek heel goed kan worden verwerkt in wiskunde D-modules. Andere mogelijkheden zijn besturingstechiek (schakelalgebra), GPS-systemen (goniometrie), of ecologische systemen (matrices, groeimodellen en exponentiële groei). Mogelijkheden die nu nog alleen mogelijkheid zijn.

### Waarom dan toch wiskunde D?

Het is dus nu nog moeilijk om leerlingen te lokken met samenwerking met het hoger onderwijs. En waarom zou een leerling dan wiskunde D kiezen?
Er zijn natuurlijk de argumenten die cTWO ook al heeft aangedragen.
Door wiskunde D te kiezen vergroot je de succeskansen in je vervolgopleiding, want:
- je gaat dieper op de wiskunde in;
- je ervaart hoe je praktische problemen met behulp van wiskunde kunt oplossen;
- je wordt handiger in algebra;
- je wordt uitgedaagd;
- je neemt al een voorsprong op de wiskunde uit je vervolgopleiding.

Wat moet een leerling die niet sterk is in wiskunde en die wiskunde niet heel erg leuk vindt, hier echter mee? Het is niet vereist, en wiskunde B is al zo moeilijk.

### Het probleem van de aansluiting

Het gebrek aan wiskundedocenten aan het hbo betekent ook dat hbo-docenten veelal slecht geïnformeerd zijn over wat wiskunde op het havo inhoudt. Vaak gaat men ervan uit dat leerlingen het examenprogramma op een formele manier beheersen en paraat

**Toelatingsvoorwaarden vanuit havo en vwo tot enkele technisch hbo-opleidingen**

| HBO-Opleiding | N+T | N+G | E+M | C+M |
|---|---|---|---|---|
| Autotechniek | ja | ja, met na of nlt | havo: nee<br>vwo: ja, met na | nee |
| Elektrotechniek | ja | ja, met na of nlt | havo: nee<br>vwo: ja, met na | nee |
| Gezondheidszorgtechnologie | ja | ja | ja | havo: nee<br>vwo: ja, met wia of wib |
| Industrieel produktontwerpen | ja | havo: ja, met na of nlt<br>vwo: ja | havo: ja, met na<br>vwo: ja | nee |
| Technische bedrijfskunde | ja | ja | ja | nee |
| Technische informatica | ja | ja | ja | havo: ja, met wia of wib<br>vwo: ja |
| Werktuigbouwkunde | ja | ja, met na of nlt | havo: nee<br>vwo: ja, met na | nee |

Bron: Min. OCW, Bijlage D, Nadere vooropleidingseisen hoger onderwijs, nr. HO/BL/2007/5152; geldig vanaf 1-8-2007

tabel 1

hebben, waardoor de zwakkere leerling grote moeite heeft met de gehanteerde aanpak. Nu is het niveau de laatste jaren ook achteruitgegaan, zeker op het gebied van algebraïsche vaardigheden. Dit is algemeen erkend en we zijn het dieptepunt ook wel voorbij, doordat de laatste jaren een grotere nadruk ligt op het oefenen van algebraïsche vaardigheden en op het aanbrengen van doorlopende leerlijnen. Op dit moment zijn echter de instapcursussen die overal zijn ontwikkeld, nog broodnodig. Minstens zo belangrijk is dat de vakdidactische aanpak van nieuwe onderwerpen niet goed aansluit. Meer interactie tussen vo en ho is hard nodig. Het Platform Bèta Techniek en SprintUp proberen hier wat aan te doen. Recent is aan de HAN het plan DOLVO gelanceerd (doorlopende leerlijnen vo-o), dat onder meer als doel heeft hbo-docenten leservaring te laten opdoen aan het vo.
Deze aansluitings'sprong' levert, paradoxaal genoeg, ook een argument voor de zwakkere leerling om wiskunde D te kiezen. Formeel omvat wiskunde B immers de wiskunde die voorbereidt op technische en economische opleidingen. Wiskunde D biedt hierbij verbreding en verdieping, maar is voor geen enkele ho-opleiding verplicht. Sterker nog: een havist heeft met het NG-profiel en wiskunde A ook toelatingsrecht aan een technische opleiding (mits hij/zij wel natuurkunde of NLT in het pakket heeft); zie het overzicht ***in tabel 1***.
Hoewel de toelatingsvoorwaarden suggereren dat wiskunde B ruim voldoende voorbereiding geeft, en dat wiskunde A in de propedeuse wel kan worden bijgespijkerd, is voor de meeste technische opleidingen niets minder waar. De aansluitingssprong maakt wiskunde D tot een steviger ondergrond voor de zwakkere leerling. Juist voor die leerling is het nodig zich beter voor te bereiden op het hbo!! Ook al ziet die leerling nog veel te weinig techniek in wiskunde D terug!
Maar wiskunde B is aan het havo al zo zwaar geworden! En met de eis dat wiskunde, Nederlands en Engels per 2012 maar één 5 te zien mag geven, loopt een zwakkere leerling toch juist kans zijn havo-diploma niet eens te halen?

### Het probleem van wiskunde B

Ook daar zou wiskunde D wel eens kunnen helpen. Wiskunde aan het havo bevindt zich momenteel tussen Scylla en Charybdis: enerzijds de (zuivere) wiskunde zonder context, anderzijds de toegepaste wiskunde in een context. Wiskunde B vraagt in naam wel om profielspecifieke vaardigheden, maar contexten blijken toch vaak neer te komen op illustratieve voorbeelden met veel tekst. De reden is dat wiskunde B een overladen programma heeft waarbinnen weinig tijd bestaat voor uitstapjes.
De creativiteit van de wiskunde zit hem echter in de wisselwerking tussen wiskunde en context. Dát is waar het in het ho ook om gaat. Wiskunde D kan iets van die creatieve wisselwerking laten zien, doordat er veel meer ruimte is voor toepassingen. Het is tenslotte een schoolexamenvak. Misschien is het daardoor nog niet zo gek wat een docent me laatst vertelde, namelijk dat de resultaten van wiskunde B-leerlingen verbeteren als zij wiskunde D erbij nemen. Ook al is het resultaat voor wiskunde D niet heel goed, de kans om met wiskunde B te slagen voor je havo-eindexamen zou wel eens flink vergroot kunnen worden. En dat is met het oog op de nieuwe exameneis van 2012 wel zo prettig.

Concluderend, stel ik voor als nieuwe slogan voor het havo:
'Wiskunde D: daar red je het mee!'

**Noot**


[1] Tweede Fase Adviespunt: *Vernieuwde Tweede Fase, de start in cijfers*. Peiling 2 in: *Monitor aanpassing profielen Tweede Fase per 2007*. Den Haag, december 2007


**Over de auteur**


Christiaan Boudri is docent werktuigbouwkunde sinds 2007 aan de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen en sinds juli 2009 is hij lid van cTWO. Hij houdt zich vooral bezig met theoretische vakken als wiskunde, mechanica en thermodynamica.
Daarnaast is hij betrokken bij de aansluiting mbo-vo-hbo: hij coördineert, geeft een aansluitingscursus wiskunde met behulp van Maple T.A. en coördineert het regionaal steunpunt wiskunde D voor het havo, regio Arnhem en Nijmegen (HaWiDee).
Bij deze activiteiten combineert hij zijn vijfjarige ervaring als docent wiskunde aan het voortgezet onderwijs en zijn werktuigbouwkundige achtergrond.
E-mailadres: *christiaan.boudri@telfort.nl*

# Werkblad prisma's en piramiden

[ Robin de Kruijff ]

**Educatieve minor**
Zoals vele andere universitaire bachelorstudenten heb ik in de eerste helft van het studiejaar 2009-2010 de educatieve minor [1] aan de TU Delft gevolgd. Hoewel ik technische natuurkunde studeer, heb ik besloten gedurende een half jaar wiskundeles te leren geven op een middelbare school. In het begin van de minor heb ik voornamelijk lessen van mijn stagebegeleidster geobserveerd, later ben ik steeds meer les gaan geven. Om de minor met goed gevolg af te kunnen sluiten moesten we twee keer een geheel hoofdstuk uit het wiskundeboek behandelen; dit werd een lessenserie genoemd. Zo konden we een eigen invulling aan onze lessen geven of gewoon het boek volgen en gaven we dus ook een aantal lessen achter elkaar aan dezelfde klas.

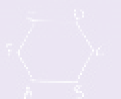
**Voorbereiding**
De laatste dag van mijn stage moest ik onder andere mijn lessenserie in de eerste klas vwo afsluiten. De lessenserie ging over een hoofdstuk uit *Getal & Ruimte* waarin hoeken, lijnstukken, en 3d-figuren werden behandeld. De voorafgaande les had ik het met de leerlingen over prisma's en verschillende soorten grensvlakken gehad. De leerlingen schenen het vrij goed te begrijpen en hadden tot dan toe ook niet veel problemen met de te maken opgaven gehad. Om te zien in hoeverre ze daadwerkelijk begrepen wat er aan de hand was, en of ze de tot dan toe geleerde wiskunde konden combineren en toepassen, heb ik voor de laatste les over dit hoofdstuk een werkblad gemaakt over prisma's en piramiden. Met dit blad wilde ik de leerlingen een deel van de les laten werken; de rest van de les zouden ze dan kunnen besteden aan de diagnostische toets die op dat moment op het programma stond.

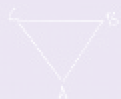
Klas L1f is een vrij kleine, rustige klas met 18 enthousiaste leerlingen. Ik wilde de leerlingen in groepjes van twee laten werken aan het tekenen van dan wel een piramide of een prisma. Hiertoe had ik 10 verschillende werkbladen gemaakt, met op elk werkblad het grondvlak van een piramide of een prisma. De grondvlakken varieerden van driehoek tot zeshoek (***zie figuur 1***). Nadat de leerlingen hun ruimtelijk inzicht hadden gebruikt om de figuur te tekenen, moesten ze vervolgens bepalen hoeveel ribben, hoekpunten en grensvlakken de figuur had. Als nabespreking wilde ik op het bord twee tabellen maken (een voor het prisma en een voor de piramide) waaruit het verband tussen het aantal hoekpunten van het grondvlak van de ruimtelijke figuur en het aantal ribben, hoekpunten en grensvlakken duidelijk moest worden. Om te kijken of iedereen het daadwerkelijk begrepen had, wilde ik ze vervolgens vragen het aantal ribben, hoekpunten en grensvlakken te bepalen van een piramide en een prisma met een gegeven, niet in de tabel voorkomend, aantal hoekpunten van het grondvlak.

**De les**
Omdat het de laatste les voor de toets was, wilden de leerlingen zelf voornamelijk aan de diagnostische toets werken. Het eerste kwartier heb ik ze dan ook daarmee aan de slag laten gaan, om vervolgens de aandacht op het werkblad te richten. In eerste instantie hadden de meeste leerlingen geen zin om te stoppen met het maken van de diagnostische toets, maar uiteindelijk gingen ze toch allemaal enthousiast aan de slag met het werkblad. Een groepje dat bijzonder snel klaar was, gaf zelfs aan graag een tweede werkblad te willen maken. Gelukkig had ik er nog een over. Om de klas te laten zien hoe een tekening van zo'n 3d-figuur eruit zou moeten zien, mochten twee leerlingen uit twee andere snelle groepjes respectievelijk een prisma en een piramide op het *whiteboard* tekenen. Terwijl zij daarmee bezig waren, rondden de andere leerlingen hun werkblad af (***zie figuur 2***). Het was erg leuk om te zien hoe enthousiast ze ermee bezig waren. Niet alle leerlingen begrepen meteen wat de bedoeling was, of hoe je het beste een 3d-figuur kon tekenen. Door ze in groepjes van twee te laten werken leerden ze ook van elkaar en ontstond er menige discussie over hoe zo'n figuur het beste getekend kon worden. Ze kwamen er vrijwel allemaal zelf uit, al waren sommige tekeningen voor een buitenstaander moeilijk te begrijpen (zoals die in figuur 2). Dit probleem speelde niet bij de tekening van een 6-zijdige piramide die een leerlinge op het bord maakte. Zij maakte er na enkele mislukte pogingen eenvoudigweg een bovenaanzicht van.

Toen iedereen zijn werkblad af had, werden de resultaten op het bord verzameld. Zo ontstonden er al snel twee tabellen, een voor de prisma's en een voor de piramiden, waarbij de bijdrage van elk groepje belangrijk was voor het totaalplaatje. Op deze manier werden alle leerlingen bij de opdracht betrokken. Dat lukte ook toen ik vroeg of de leerlingen konden voorspellen wat er in de volgende kolommen van deze tabellen zou komen te staan en hoe ze dit aanpakten. De leerlingen bleken bij hun voorspellingen handig gebruik te maken van regelmaat in de tabellen. Het doel van de les was om uiteindelijk algemene formules af te leiden aan de hand van de verzamelde informatie. Net nadat ik als opstapje hiervoor opgemerkt had dat er dus een verband tussen het aantal hoekpunten van het grondvlak van de 3d-figuur en het aantal ribben, hoekpunten en grensvlakken te ontdekken is als de tabellen helemaal ingevuld zijn, stak een van de leerlingen zijn hand op: 'Juf, je kunt hier toch ook woordformules bij bedenken?' Dat hebben we vervolgens met de klas zowel bij de piramide als bij het prisma gedaan. Daarna was het voor de leerlingen niet moeilijk meer om, zonder eerst een tekening te maken of de tabel op basis van regelmaat verder in te vullen, te bepalen hoeveel ribben, hoekpunten en grensvlakken een piramide en een prisma met een 12-hoekig en een 20-hoekig grondvlak hebben.

**Evaluatie**
Door de werkbladen hebben de leerlingen een beter begrip gekregen van prisma's en piramiden en hebben ze ook de eerder geleerde woordformules weer kunnen gebruiken. De verschillende aspecten van de opdracht – het groepswerk, het 3d-inzicht en het belang van het individuele werk – zijn allemaal goed naar voren gekomen. Ook de intelligentere leerling werd bij deze





figuur 1



figuur 2

opdracht uitgedaagd: door het opstellen van de woordformules. Aan de discussie binnen de klas was te merken dat ze er serieus mee aan de slag gingen en tijdens het rondlopen door de klas kwam ik veel goede figuren tegen. Door de snellere groepjes een nieuw werkblad te laten maken of de figuur op het bord te laten tekenen, was iedereen ongeveer even lang bezig, wat goed naar de klassikale bespreking toewerkte.
Ik had achteraf gezien de eigenschappen van een piramide en een prisma wellicht meer moeten benadrukken, maar al met al vonden mijn stagebegeleidsters en ik het een geslaagde les.

**Noot [red.]**

[1] Science Education Track Delft: « *www.tudelft.nl/live/pagina.jsp?id=26f1c9d9-3ad6-42db-ad7c-289-e2e0af792&lang=nl* »

**Over de auteur**

Robin de Kruijff is studente technische natuurkunde aan de TU Delft, volgde tijdens het eerste semester van studiejaar 2009-2010 de educatie-minor wiskunde en gaf les op het Comenius College te Capelle aan den IJssel.
E-mailadres: *miss_hood@mac.com*

# Moet dat zo? Kan het niet anders?

[ Sieb Kemme ]

**Lerarenopleiding onder de maat?**

Op maandag 29 maart 2010 kopt het *Dagblad van het Noorden*: 'Lerarenopleiding universiteit zwaar onder de maat.' En verder: 'De eerstegraads lerarenopleiding van de Rijksuniversiteit Groningen behoort tot de slechtste van het land.'
Collegevoorzitter Sibrand Poppema ziet in het lage wetenschappelijke niveau van de opleiding aanleiding om te bepleiten dat de opleidingen weer gekoppeld gaan worden aan de faculteiten en los worden gemaakt van het algemene Universitair Onderwijscentrum. Volgens hem 'is het verstandig dat wiskundeleraren weer opgeleid worden bij wiskunde. Dan gaat het wetenschappelijk niveau van de leraren-opleiding waarschijnlijk ook weer snel omhoog.'
Als je de krant mag geloven, is dit in jaren van armoede eindelijk een verstandig bericht van een onderwijsmanager.
Opvallend hierin is het voorschot dat de heer Poppema neemt op een advies dat nog door een in te stellen onderzoekscommissie moet worden uitgebracht. Hij moet wel erg overtuigd zijn geraakt van de ellendige situatie op zijn eigen universiteit om zo duidelijk zijn mening naar buiten te brengen.

Hoe ziet die opleiding er dan uit? Wat zijn de doelen en eindtermen? Dank zij het onvolprezen internet kom je daar binnen vijf minuten achter. Het Universitair Onderwijscentrum Groningen (UOCG) heeft het allemaal heel precies opgeschreven: 'De eerstegraads leraar die de lerarenopleiding van het UOCG met goed gevolg heeft doorlopen, is:

1. Interpersoonlijk competent;
2. Pedagogisch competent;
3. Vakdidactisch competent;
4. Organisatorisch competent;
5. Competent in het samenwerken met collega's;
6. Competent in het samenwerken met de omgeving;
7. Competent in reflectie en ontwikkeling.'

Van de zeven genoemde punten komt het woord 'vak' alleen in punt 3 aan de orde. In de toelichting staat, in deftige woorden, dat de leraar geacht wordt goed les te kunnen geven. Daarin staat ***niet*** dat de leraar ook geacht wordt vakbekwaam te zijn. Overigens is deze lijst van zeven in overeenstemming met een dergelijke lijst die te vinden is op de site van de Stichting Beroepskwaliteit Leraren (zie: *www.lerarenweb.nl*). Daarmee verschaft het UOCG zich een landelijk alibi.

**Goed leraarschap**

Deze prietpraat lezende, heb ik geen visitatiecommissie nodig om te weten dat een dergelijke lerarenopleiding niet kan deugen. Het is de mooi pratende onderwijskundigen dus eindelijk gelukt om de macht helemaal over te nemen in Groningen. Gesteund door een streven naar meer organisatorische eenvoud, zijn alle opleidingen losgekoppeld van de vakstudies en bij elkaar gezet in één onderwijskundig instituut. Daarmee zijn vakdidactici, die voorheen nog met beide benen in hun eigen vak stonden, bij voorbaat schatplichtig geworden aan de eenheidsworst van één onderwijskundige visie dat bij zo'n instituut schijnt te horen. Voor vakdidactici is dat bij voorbaat een verloren strijd, want onderwijskundigen zijn van mening dat bekwaamheid in het vak goed is voor vakidioten en dat je leerlingen daar niet mee mag lastigvallen. Dit staat haaks op het beeld dat ik heb van goed leraarschap: plezier hebben in je eigen vak, daar min of meer goed in zijn en dat plezier weten over te brengen op je leerlingen zodat die zin krijgen in je vak. Ik geef het toe, dit is een hoog gegrepen ideaal,

maar de kern ligt toch bij de deskundigheid op het vakgebied waarin je bent afgestudeerd, in combinatie met betrokkenheid voor je leerlingen.

### Terugkijkend

Even een blik in het verleden. Vanaf 1973 was ik betrokken bij de lerarenopleidingen wiskunde, begonnen als docent bij de tweedegraads opleiding Zuid-West Nederland in Rotterdam. Vanaf 1975 was ik betrokken bij de start van de tweedegraads opleiding wiskunde aan De Witte Lelie in Amsterdam. In de loop van die jaren ontwikkelden deze opleidingen zich tot professionele instellingen met ruime aandacht voor het vak en de didactiek van dat vak. Wel was er de eeuwige strijd met de algemeen onderwijskundigen die van mening waren dat vakdidactiek slechts een specialisme is van de onderwijskunde. Gelukkig lukte het ons in Amsterdam om de vakdidactiek bij het vak te houden en op een aantal punten zelfs binnen de wiskundestudie te integreren. Op die manier was de verbinding tussen vak en didactiek een heel natuurlijke en waren studenten op eigen niveau vertrouwd met het idee dat de wiskundestudie meer was dan het leren bewijzen van stellingen en het maken van sommen. Helaas zijn deze tweedegraads opleidingen, met hun eigen identiteit, volledig ten onder gegaan in het organisatorische geweld van het hbo en zijn ze binnen de giga-hbo-instellingen nauwelijks herkenbaar als autonome opleidingen met hun eigen signatuur.
In 1979 verhuisde ik naar de eerstegraads opleiding aan de Rijksuniversiteit Groningen. Naast onderwijs in de didactiek van de wiskunde en het begeleiden van studenten in hun stage, gaf ik wiskunde aan eerstejaars studenten. De lerarenopleiding viel toen nog onder de verantwoordelijkheid van de Faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen. De wiskundestudie aan een universiteit is per definitie gericht op een wetenschappelijke opleiding tot wiskundige. Daarbinnen is geen ruimte voor een geïntegreerde aanpak met vakdidactiek. De vakdidactiek kwam aan het eind van de studie. Voor sommige studenten was dat een verademing, anderen stonden daar minder open voor. Vanuit mijn Amsterdamse ervaringen heb ik de scheiding tussen de wiskundestudie en de vakdidactiek altijd als een niet te vermijden fundamenteel gebrek ervaren binnen de universitaire lerarenopleiding wiskunde. Altijd bleef er de spanning bestaan tussen de 'harde' wiskunde en de 'zachte' vakdidactiek.
Daarom zal de heer Poppema het niet redden door alleen de opleidingen weer terug te plaatsen in de faculteiten, al zal dit wel een hele verbetering zijn.

### Als ik minister was...

Als ik minister of staatssecretaris was, dan wist ik het wel. Dan zorgde ik dat zo snel mogelijk zelfstandige Educatieve Hogescholen werden ingericht, waarin zowel de lerarenopleiding voor het basisonderwijs als voor het voortgezet onderwijs (eerste- én tweedegraads) zouden worden ondergebracht. Met de mogelijkheid om van de tweedegraads naar de eerstegraads opleiding door te stromen, eventueel in een deeltijdconstructie. Met in de lerarenopleiding vo ten minste 75% van de tijd ingeruimd voor de studie in het vakgebied (inclusief vakdidactiek) en waarin de onderwijskundige voorbereiding volledig gekoppeld wordt aan de praktijk. Met de mogelijkheid om na het behalen van de eerstegraads bevoegdheid alsnog door te stromen naar een universitaire master in het vakgebied. Als ik dan toch bezig ben, zou ik tegelijkertijd de gelegenheid te baat nemen voor aparte bevoegdheden voor de onderbouw en de bovenbouw van de basisschool.

### Over de auteur

Sieb Kemme studeerde wiskunde, gaf les aan leerlingen en studenten en houdt zich bezig met de ontwikkeling van lesmateriaal voor het wiskundeonderwijs. Van 2007 tot 2009 was hij als projectleider van cTWO ook betrokken bij beleidsmatige ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs. Als beginnend pensionado nam hij onlangs het initiatief tot de website *rekenbeter.nl*.
E-mailadres: *skemme@educadbv.nl*

## Boekbespreking




Auteur: Benne de Weger
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Utrecht (2009), deel 63
ISBN: 978 90 50411080
Prijs: € 21,00 (192 pagina's; paperback)

Cryptografie klinkt spannend. Leerlingen krijgen meteen visioenen van spionnen, complotten en duistere praktijken. Ook bij het gebruik van cryptografie voor veilig internetten, betalen via internet of beveiligen van betalingen met pinpas of creditcard kunnen ze zich wel wat voorstellen. Getaltheorie vinden leerlingen daarentegen een stuk minder spannend klinken, terwijl het toch een mooi stuk wiskunde is dat onmisbaar is voor de hedendaagse cryptografie. Getaltheorie is ook een tak van de wiskunde waarin je zonder veel voorkennis al veel kunt doen. Door de logische koppeling van cryptografie aan getaltheorie, kun je leerlingen laten zien waar de tamelijk abstracte getaltheorie voor gebruikt kan worden en blijken leerlingen maar al te zeer bereid de abstractie in te duiken om de cryptografische kennis over bijvoorbeeld de Diffie-Hellman-sleuteluitwisseling of het cryptosysteem RSA te kunnen begrijpen.

Cryptografie en getaltheorie zijn dus prima onderwerpen voor een lessenreeks bij wiskunde D en op de site van cTWO is voldoende lesmateriaal over dit onderwerp te vinden. Tot zover klinkt het aantrekkelijk. Maar wij zelf hebben als docenten

# / Elementaire Getaltheorie en Asymmetrische Cryptografie

[ Monique Stienstra ]

vaak niet veel over cryptografie gehad in onze eigen opleiding en het is toch prettig wat meer boven de stof te staan voor je het onderwerp behandelt in de les. Gelukkig is er dan nu het boek *Elementaire getaltheorie en asymmetrische cryptografie* van Benne de Weger verschenen. Volgens het voorwoord is dit boek in de eerste plaats geschreven voor studenten informatica op hbo en universiteit en voor IT- en informatiebeveiligingsprofessionals, maar ook voor andere wiskundigen en geïnteresseerden die willen begrijpen hoe getaltheorie een essentiële rol speelt bij toepassingen in de cryptografie. Zelf denk ik dat het boek ook zeer geschikt is voor docenten wiskunde die hun getaltheoretische kennis willen opfrissen of aanvullen en die zich willen voorbereiden op het geven van een lessenreeks over cryptografie. Doordat het boek is ontstaan uit cursusmateriaal bij de cursus 'Capita Selecta Wiskunde', die de Open Universiteit aanbiedt aan tweedejaars studenten informatica, leent het boek zich uitstekend voor zelfstudie. Het boek wordt vanaf komend schooljaar ook gebruikt op de masteropleiding tot eerstegraads-wiskundedocent van de HAN. De focus van het boek ligt duidelijk op de wiskunde, met name de getaltheorie en beoogt te laten zien hoe het begrip van getaltheorie essentieel is voor het begrijpen en goed kunnen gebruiken van asymmetrische cryptografie. Bij het boek hoort het programma MCR (Modulaire en Cryptografische Rekenmachine), dat op de website van Benne de Weger (*www.win.tue.nl/~bdeweger/MCR*) gratis te downloaden is. Met dit programma kunnen berekeningen uitgevoerd worden van enkele honderden cijfers groot, een realistische grootte voor sleutellengtes in de cryptografie. Op zich is dit aardig om erbij te hebben, al denk ik dat het idee van de berekeningen ook wel met kleinere getallen duidelijk wordt en vind ik het makkelijker om een grafische rekenmachine naast het boek bij de hand te hebben dan een computer, maar dit hangt natuurlijk af van ieders persoonlijke voorkeur en het is prettig de mogelijkheid in elk geval te hebben om met grote getallen te rekenen.

De hoofdstukken 1 tot en met 4 worden voorafgegaan door een hoofdstuk I dat 'Introductie' heet. Dit hoofdstuk vind ik een erg geslaagd en nuttig hoofdstuk. Hierin wordt geschetst waar cryptografie o.a. gebruikt wordt. Zo is cryptografie onmisbaar voor het veilig kunnen betalen met pinpas en creditcards. Het verschil in veiligheid tussen magneetstrip en chip op de pas wordt uitgelegd en er wordt uitgebreid ingegaan op de EMV-standaard, de betaalstandaard waarvoor EuroCard, MasterCard en Visa het initiatief hebben genomen. Ook wordt hier meteen getoond aan de hand van RSA waarvoor de getaltheorie nodig is. Vervolgens worden de verschillende beveiligingsaspecten onderscheiden met betrekking tot internetbankieren waar de cryptografie een belangrijke rol heeft, nl. vertrouwelijkheid (een onbevoegde mag de gegevens niet kunnen inzien), integriteit (een bevoegde mag de gegevens niet kunnen wijzigen) en authenticiteit (een onbevoegde mag zich niet kunnen voordoen als iemand anders). Tot slot wordt de historie van de cryptografie geschetst, ruwweg van Julius Caesar tot nu.
Wanneer je met leerlingen iets met cryptografie gaat doen, is het wel interessant om meer aandacht te besteden aan de oudere symmetrische systemen omdat hier ook gebruik gemaakt kan worden van voor hen bekende wiskunde als kansrekening, statistiek en algebra. Voor dit boek begrijp ik de keuze echter goed om de historische cryptografie alleen kort aan te stippen, aangezien het hier meer gaat om de getaltheorie en die is niet nodig voor de oudere symmetrische cryptosystemen.
Na deze introductie volgen de vier hoofdstukken waar alles om draait. In de eerste drie hoofdstukken staat de wiskunde centraal, in hoofdstuk 4 komt alles samen in de cryptografie.
Hoofdstuk 1 heeft als titel 'Deelbaarheid'. Hierin gaat het over delen, delers, priemgetallen, ontbinden in priemfactoren en het algoritme van Euclides. Dit laatste algoritme berust op de eigenschap dat $\text{ggd}(a, b) = \text{ggd}(a, b - k \cdot a)$, met $a$, $b$ en $k$ geheel en $a$ en $b$ positief. Hierdoor is het mogelijk grote getallen $a$ en $b$ snel te reduceren tot kleinere getallen en zo eenvoudig de grootste gemene deler uit te kunnen rekenen. Net als in de rest van het boek staan er veel opgaven in het hoofdstuk waarin er veel bewezen en soms gerekend moet worden. De theorie is helder opgeschreven en is wiskundig van aard met veel stellingen, lemma's en bewijzen.
Hoofdstuk 2 gaat over congruenties. Het grondidee van congruenties wordt duidelijk gemaakt door congruenties te vergelijken met het klokrekenen. Op een 12-uursklok is het verschil tussen 3 uur 's middags en 3 uur 's nachts niet te zien en ook het verschil tussen 3 uur op 23 februari of op 24 februari is niet te zien. Net zo zijn getallen $a$ en $b$ congruent modulo $m$ als het verschil van $a$ en $b$ een veelvoud van $m$ is. Daarna worden begrippen als restklasse, representant en volledig restsysteem geïntroduceerd. Vervolgens komt het rekenen met congruenties aan de orde en de inverse, de $\phi$-functie van Euler, de stellingen van Fermat en Euler en de Chinese reststelling. Ook hier weer veel stellingen, bewijzen, opgaven en duidelijke uitleg. Wat ik ook erg aardig vind, zijn de stukjes tussendoor waarin een en ander geschreven wordt over belangrijke wiskundigen als Gauss, Fermat en Euler.
In hoofdstuk 3 komen we gevoelsmatig al een stuk dichter bij de cryptografie. De veiligheid van cryptografische systemen berust op wiskundige problemen die we niet kunnen oplossen. Voor de Diffie-Hellman-sleuteluitwisseling is dit het vinden van de discrete logaritme en voor RSA het ontbinden van zeer grote getallen in priemfactoren. Om hier inzicht in te krijgen wordt in dit hoofdstuk ingegaan op primaliteitstests, de verdeling van priemgetallen, het maken van priemgetallen, factoriseren en discrete logaritmen.
Het laatste hoofdstuk slot heet 'Cryptografie'. Nu zien we waarvoor al het voorgaande nodig was, al is daarover in het voorgaande ook al regelmatig iets gezegd. Het wezen van asymmetrische cryptografie wordt eenvoudig en duidelijk beschreven door een vergelijking te maken met een kistje dat men met een hangslot kan afsluiten. Een hangslot kan men sluiten door het dicht te drukken. Hier is geen sleutel voor nodig. Wanneer je een aantal personen een exacte kopie van je hangslot geeft, kan ieder je boodschappen sturen in een kistje dat met een dergelijk slot afgesloten wordt. Wanneer je zelf de enige bent die een sleutel heeft, ben jij de enige die de boodschap er weer uit kan halen.
Met asymmetrische cryptografie werkt

het net zo. Iemand kan de boodschap op een voorgeschreven manier versleutelen, maar eenmaal versleuteld ben jij de enige die het bericht kan ontcijferen met je geheime privé-sleutel. Dit versleutelen en ontcijferen is vaak gebaseerd op getaltheorie zoals die in hoofdstuk 2 behandeld is, waarbij het versleutelen eenvoudig gaat; maar het vercijferen zonder sleutel behoort tot de moeilijke problemen die in hoofdstuk 3 beschreven zijn. De systemen die in hoofdstuk 4 zijn beschreven, zijn de Diffie-Hellman-sleuteluitwisseling en RSA. Ook het maken van veilige RSA-sleutelparen en het versnellen van RSA met behulp van de Chinese reststelling komen aan bod. Na deze hoofdstukken volgt nog een hoofdstuk en een index.

Al met al is het een goed boek geworden met veel aandacht voor de opbouw van de getaltheoretische basis en daarnaast een duidelijke beschrijving van de asymmetrische cryptografie en de toepassingen daarvan. Ik kan het een ieder die op school aandacht aan dit onderwerp wil besteden, aanbevelen om de eigen kennis te vergroten en te verdiepen. Voor leerlingen van het voortgezet onderwijs is het boek denk ik nog te hoog gegrepen vanwege de vele stellingen en bewijzen, maar zij behoren dan ook niet tot de doelgroep van de schrijver.

**Over de recensent**
Monique Stienstra is wiskundedocent aan het Stedelijk Gymnasium Nijmegen en docent aan de masteropleiding tot eerstegraads-wiskundedocent van de HAN. Voor cTWO heeft zij in samenwerking met Harm Bakker de module cryptografie geschreven voor vwo wiskunde D.
E-mailadres: *monique.stienstra@han.nl*

# Persbericht / Nieuwe NLT-Modules gecertificeerd

[ Brechje Hollaardt ]



foto 1 De gecertificeerden

**Amersfoort, 23 juni 2010**
Op dinsdag 22 juni reikte Harrie Eijkelhof, voorzitter van de Stuurgroep NLT, op Meridiaan College 't Hooghe Landt in Amersfoort de certificaten uit van de 21 NLT-modules die schooljaar 2009/2010 zijn gecertificeerd.
Voor havo zijn dit: Door de zoete appel heen bijten; Overleven in het International Space Station; Waterzuivering; Human Technology Cares; Een optimale maaltijd; Leef met je hart.
Voor vwo zijn gecertificeerd: Meten en interpreteren; Queeste naar Entropie; Complexe stromen; Echt of vals; Blue energy; Drinkwater, lekker belangrijk; Biosensoren; Kunstnier en membranen; Oude brandstof in nieuwe vaten; Food or Fuel; Sounddesign; Medicijnen van molecuul tot mens; Kwantumstructuur van de materie; Moleculaire gastronomie; IJs en klimaat.
In totaal zijn er nu 62 gecertificeerde modules, waarvan 25 voor havo en 37 voor vwo. Ze zijn tot stand gekomen in een samenwerking tussen scholen, universiteiten, hogescholen en kennisinstituten. Het Landelijk Ontwikkelpunt NLT, de Stuurgroep NLT en externe experts hebben de modules beoordeeld op inhoud en didactiek. Docenten en leerlingen hebben de modules getest op uitvoerbaarheid.

Bijzonder is dat er dit schooljaar ook e-versies voor e-klassen zijn gerealiseerd van vijf gecertificeerde NLT-modules: Dynamisch modelleren (havo), Forensisch Onderzoek (havo), Nul energiehuis (havo), Meten aan melkwegstelsels (vwo) en Bio-informatica (vwo). Ze voldoen aan de kwaliteitseisen, waardoor ze zijn te gebruiken als gecertificeerd. E-klassen is een initiatief van Universiteit van Amsterdam, Vrije Universiteit, Hogeschool van Amsterdam, Hogeschool INHOLLAND en scholen voortgezet onderwijs, die samenwerken in *its academy*. Deze partijen hebben de modules bewerkt en geschikt gemaakt, samen met regionale steunpunten NLT die de desbetreffende modules in beheer hebben.

Regionale steunpunten ondersteunen docenten op verschillende manieren bij het invoeren van NLT. Ze proberen zoveel mogelijk vragen van docenten te beantwoorden en geven trainingen bij enkele NLT-modules. Elk steunpunt beheert een aantal modules. Scholen kunnen met vragen over die modules terecht bij het desbetreffende steunpunt.

**Meer informatie**
- *www.betavak-nlt.nl*
- *www.betavak-nlt.nl/regionaal*

**Over de auteur**
Brechje Hollaardt is communicatie-adviseur Landelijk Ontwikkelpunt NLT.
E-mailadres: *brechje@hypertekst.nl*



# Jaarvergadering /

## TWEEDE UITNODIGING

**Agenda**

10:00-10:50u - **Huishoudelijk gedeelte**

1. Opening door de voorzitter, mevr.drs. M. Kollenveld.
2. Jaarrede door de voorzitter.
3. Notulen van de jaarvergadering 2009 (zie het volgende nummer van *Euclides*).
4. Jaarverslagen (zie het volgende nummer van *Euclides*).
5. Decharge van de penningmeester, vaststelling van de contributie en benoeming van een nieuwe kascommissie.
6. Bestuursverkiezing. Bestuurslid mevr. M. Lambriex is aftredend en stelt zich herkiesbaar. Bestuurslid mevr. M. Kamminga verlaat op eigen verzoek het bestuur. Het bestuur stelt de heren C. Boudri en J. Gademan kandidaat voor een plaats in het bestuur. Tot 28 dagen na het verschijnen van deze uitnodiging kunnen personen schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden.
7. Rondvraag. Leden die een vraag in de rondvraag willen stellen, wordt verzocht deze vóór de vergadering in te dienen bij de secretaris (*secretaris@nvvw.nl*).
8. Sluiting van de jaarvergadering.

Dit is de tweede uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 2010 van de *Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren* op **zaterdag 6 november 2010**.

Aanvang - 10:00 uur
Sluiting - 16:00 uur
Plaats - Anna Van Rijn College (*locatie Albatros*), Albatros 1, 3435XA Nieuwegein

### Programma studiedag

| | |
|---|---|
| 10:50-11:00u | Inleiding op de studiedag |
| 11:00-11:45u | Plenaire lezing |
| 11:45-12:00u | Koffie |
| 12:00-13:00u | Workshop, ronde 1 |
| 13:00-14:00u | Lunchpauze, marktbezoek |
| 14:00-15:00u | Workshop, ronde 2 |
| 15:00-15:20u | Koffie |
| 15:20-16:00u | Plenaire voordracht |
| 16:00-16:10u | Afsluiting |

### Themagedeelte: Geboeid door wiskunde

Eén van de bedoelingen van de bijstelling van de examenprogramma's in 2007 voor de tweede fase was dat docenten/scholen meer vrijheid zouden krijgen bij de invulling van hun vak, omdat vanaf 2009/10 nog maar 60% van het programma centraal zou worden geëxamineerd. De resterende 40% is alleen globaal omschreven en het is de vrijheid van scholen om daaraan een eigen invulling te geven. Wiskunde is de ongelukkige uitzondering: wiskunde A (vwo) en wiskunde B (havo/vwo) moeten voor (bijna) 100% in het CE worden getest vanwege de 'doorstroomrelevantie'. Daarmee zijn de docenten 'geboeid' in de nare zin van het woord: gekneveld door de volheid van het programma dat verplicht moet worden afgewerkt vanwege het centraal examen.

Gelukkig weten veel docenten hun leerlingen ook te boeien met de mooie kanten van het vak, ondanks de beperkingen die zijn opgelegd. En dat willen wij op deze studiedag graag onder de aandacht brengen. Wij zien hierin vier verschillende gebieden.

1. **Binnen het examenprogramma zelf.** Bij wiskunde C (vwo) en wiskunde D (havo/vwo), wiskunde A (havo) en statistiek (vmbo) zijn er nog vrijheden binnen het examenprogramma en dus plaats voor een eigen, boeiende invulling voor de leerlingen.
2. **Buiten het gewone lesgebeuren om.** Er zijn veel initiatieven die buiten het schoolboekje omgaan: Vierkant, Pythagoras, Kangoeroe, Wiskunde Olympiade, Wiskunde Alympiade, Wiskunde B-dag, Zebra's, Wiskunde Scholen Prijs. Zowel een kijkje in de keuken van de organisatoren als de originele manier waarop u dit binnen de school haalt, kan boeiend zijn.
3. **Samenwerking met andere vakken.** Voor de hand liggend zijn natuurlijk de exacte vakken, maar ook aardrijkskunde en economie zijn uitermate geschikt om samen mee op te trekken. En bij het vmbo zijn er mogelijkheden om met de beroepsgerichte vakken samen te werken. We laten u mooie praktijkvoorbeelden zien van manieren van samenwerking die het vak zelf boeiender kunnen maken voor leerling en docent.
4. **De wiskunde zelf.** Zijn er onderwerpen in de wiskunde waardoor uzelf geboeid kunt raken? Sommige docenten maken daarvoor tijd vrij en presenteren dit enthousiast aan hun leerlingen. We zijn benieuwd naar hun positieve ervaringen die ook bruikbaar zijn voor andere docenten.

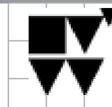
Anders dan voorheen hebben we u tot 31 augustus de ruimte gegeven een voorstel in te dienen om zelf een workshop te geven. Omdat de kopij voor dit nummer van *Euclides* voor 12 juli ingestuurd moest worden, is het definitieve programma op het moment van dit schrijven nog niet helemaal bekend! Daarom worden de omschrijvingen van de workshops niet, zoals tot nu toe gebruikelijk was, in het eerste nummer van *Euclides* opgenomen, maar gepresenteerd op de website van de NVvW (*www.nvvw.nl*). U kunt ze daar vanaf nu vinden.

De eindverantwoordelijke voor het themagedeelte is Henk van der Kooij (*henk@fi.uu.nl*).

### De LIO-dag

Dit jaar wordt er ook een speciaal programma opgezet voor de studenten van de lerarenopleidingen, met name de LIO'ers. Het ochtendgedeelte gaat over

# Studiedag 2010



[ Marianne Lambriex ]

afstudeerscripties met pas afgestudeerden als sprekers en in de middag nemen ze deel aan het themagedeelte.
De eindverantwoordelijke voor de LIO-dag is Douwe van der Kooi (*d.van.der.kooi@hva.nl*).

### Nieuwe leden
De studiedag is een uitstekende gelegenheid voor het bestuur om persoonlijk kennis te maken met de nieuwe leden. Dit doen we graag met een hapje, een drankje en een praatje tijdens de lunchpauze. Daarvoor nodigen we de nieuwe leden van harte uit. In de loop van oktober ontvangen zij hiervoor een persoonlijke uitnodiging via een e-mailbericht.

### Kosten
De studiedag is gratis voor leden.
*Leden: maak (nog) eens reclame voor de vereniging en breng een collega-niet-lid mee!*
Niet-leden zijn welkom tegen betaling van een bijdrage in de kosten van € 70,00 (deze kosten kan de school betalen uit de nascholingsgelden en zijn als vakbondscontributie op te voeren!). Hiermee zijn zij, als ze daarvoor belangstelling hebben, tevens gratis lid van de vereniging tot 1 augustus 2011, ontvangen de zeven nummers van de lopende jaargang van *Euclides* en hebben gratis toegang tot examenbesprekingen in het voorjaar en mogelijkheid tot deelname aan de verenigingswerkgroepen.
Ook studenten zijn welkom; zij betalen € 35,00. Wie een lunch bestelt, betaalt daarvoor € 10,00.

### Aanmelding
Aanmelding dient te geschieden **vóór 13 oktober 2010.**
Vorig jaar melden zich nog 78 enthousiaste deelnemers na de sluiting van aanmelding. Dat leverde voor de organisatie veel problemen op. Daarom het dringende verzoek aan u om zich op tijd aan te melden.
Dit jaar gaat de aanmelding weer geheel *digitaal* via de website van de vereniging, *www.nvvw.nl*. Daarop staan het volledige programma en de workshops waaruit u een keuze uit kunt maken. Het aanmeldingsformulier leidt u door de vragen.
Leden die een lunch willen gebruiken, maken het voor hen geldende bedrag over op bankrekeningnummer 143917 ten name van Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren te Dronten. Betaalt u via een gezamenlijke of schoolrekening of onder een andere naam, vermeld dan ook de volledige deelnemersnaam, adres en woonplaats.
Het voor u geldende bedrag kunt u aflezen uit de volgende tabel.

| | zonder lunch | met lunch |
|---|---|---|
| **Lid** | gratis | € 10,00 |
| **Niet-lid** | € 70,00 | € 80,00 |
| **Student (niet-lid)** | € 35,00 | € 45,00 |

De plaatsing in werkgroepen geschiedt op volgorde van binnenkomst van aanmelding. De plaatsing wordt uiterlijk één week voor de studiedag bevestigd via een e-mailbericht. Aan het begin van de studiedag ontvangt u een badge met uw plaatsingsgegevens.
Ter plaatse aanmelden is mogelijk, echter niet wenselijk omdat bij onvoldoende voorinschrijving van een werkgroep deze niet door zal gaan. De werkgroepleiders stellen hun tijd en inzet gratis ter beschikking en het is dan teleurstellend om voor twee personen een lange trip te moeten maken. Voor de organisatie (ook vrijwilligers) is het van belang dat u zich op tijd aanmeldt. Wilt u toch op de dag zelf aanmelden, dan betaalt u € 20,00 extra en is het kunnen bijwonen van een werkgroep afhankelijk van de beschikbare ruimte.
De eindverantwoordelijken voor de indeling in de workshops zijn Henk en Arja Bijleveld (*henk.bijleveld@gmail.com*).

### Certificaat
De NVvW heeft de mogelijkheid om nascholingscertificaten uit te reiken. Wilt u een certificaat ontvangen, vermeld dan bij uw aanmelding ook uw voorletters en uw geboortedatum.
*Deze professionalisering is gecertificeerd door de NVvW ten behoeve van het Beroepsregister. Waardering: 4 punten.*
U kunt uw certificaat na afloop van de studiedag (vanaf 15:45 uur) in ontvangst nemen, op vertoon van een geldig identiteitsbewijs. U hebt alleen recht op een certificaat als u de gehele studiedag heeft meegemaakt. Certificaten worden niet nagestuurd.

### Informatie
Contactpersoon voor de jaarvergadering/studiedag is Marianne Lambriex; emailadres: *m.lambriex@nvvw.nl*; bij onbereikbaarheid én noodgeval Kees Lagerwaard, tel. 026-3813646; e-mailadres: *secretaris@nvvw.nl*.

**NVvW-dag: zaterdag 6 november 2010!!**

RECREATIE

# Puzzel 86-1

# Cijfersommen

[ Frits Göbel ]

Onder de *cijfersom* van een getal $g$ verstaan we de som van de cijfers van het tientallig geschreven getal $g$. We noteren dit als DS($g$). In deze aflevering bekijken we cijfersommen van machten: $DS(n^k)$ waarbij $n$ en $k$ gehele getallen >1 zijn, en wel speciaal die gevallen waarin $DS(n^k) = n$.
Voor een vaste waarde van $k$ is deze relatie te zien als een vergelijking in $n$.
Om bij de kwadraten te beginnen: er is precies één waarde van $n$ waarvoor $DS(n^2) = n$, namelijk 9. Bij derde machten, dus $k = 3$, blijken er vijf oplossingen te bestaan.

**Opgave 1**
Bepaal alle $n$ met $DS(n^3) = n$.

**Opgave 2**
Het aantal oplossingen voor $k = 2, \ldots, 20$ is respectievelijk 1, 5, 5, 4, 4, <u>8</u>, 3, 3, 6, 3, 1, <u>11</u>, 5, 7, 6, 4, 2, <u>9</u>, 3.
Kunt u de uitschieters bij $k = 7, 13, 19$ verklaren?

Bovenstaande rij lijkt zich nogal onregelmatig te gedragen. Tot aan $k = 20$ zijn de aantallen positief, maar blijft dat ook zo? Je moet natuurlijk altijd heel voorzichtig zijn met vermoedens die op een klein aantal voorbeelden zijn gebaseerd. Uit mijn studietijd herinner ik me hoe Professor Kloosterman ons dat duidelijk maakte. Dat ging ongeveer als volgt.
*Bewering*: Alle oneven getallen zijn ondeelbaar.
*Bewijs*: Het klopt voor $n = 1, 3, 5, 7$.
- 9… Is een uitzondering.
- Het klopt ook voor 11 en 13.
- Dat is wel genoeg.
- We nemen nog even een steekproef: 37. Klopt ook.
- Q.E.D.

Tot zo ver het ‘bewijs’. Nu we dit gezien hebben, kunnen we aan de slag met de laatste opgave.

**Opgave 3**
Los $DS(n^k) = n$ op voor zo veel waarden van $k$ dat u ofwel een $k$ zonder oplossingen hebt, ofwel tot de conclusie komt dat zo’n $k$ niet bestaat. Een meer wetenschappelijke aanpak is natuurlijk ook goed!

Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522JS Enschede. Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing.
De deadline is 19 oktober. Veel plezier!

Oplossing 85-6

# Een familie symmetrische grafen

Er waren slechts 17 oplossers. Misschien kwam dat door het onderwerp grafentheorie. Bij sommigen was het weggezakt, voor anderen was het helemaal nieuw.
De grafen $G(b, k)$ staan bekend onder de naam Kneser-grafen, maar ik heb dat er niet bij vermeld om het opzoeken van de antwoorden via Internet niet al te gemakkelijk te maken.

*Opgave 1* is door alle inzenders goed opgelost. Het gevraagde aantal lijnen is:

$$\tfrac{1}{2}\binom{b}{k}\binom{b-k}{k}$$

Deze uitdrukking is nog wel te herleiden, maar daar wordt hij niet mooier van.

Bij *opgave 2* was het niet voor iedereen duidelijk dat 'taille = $t$' niet alleen betekent dat er een cykel van $t$ in de graaf zit, maar ook dat er geen kleinere cykel is. Het complete antwoord, waarin $t$ de taille is, ziet er als volgt uit.

- Als $b \geq 3k$ is $t = 3$.
- Als $2k + 2 \leq b \leq 3k - 1$ is $t = 4$.
- $t(G(5, 2)) = 5$.
- Als $k \geq 3$ is $t(G(2k + 1, k)) = 6$.

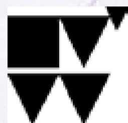
*Opgave 3* ging over $G(7, 2)$. Ik had de term *zelf-complementair* niet gedefinieerd, omdat hij al in een eerdere Recreatie voorkomt. Maar enkele inzenders gaven aan dat ze het toch moesten opzoeken.
De graaf is *niet* zelf-complementair. Diverse inzenders bewezen dit als volgt.
In $G(7, 2)$ zijn er tussen de zes punten $\{1, i\}$ voor $i = 2, 3, ..., 7$ geen lijnen. Dus het complement bevat een volledige graaf op 6 punten. Als de graaf zelf-complementair was, zou die ook in $G(7, 2)$ moeten zitten. Maar daar zijn lang geen zes onderling disjuncte paren uit $\{1, 2, ..., 7\}$ aan te wijzen, waarmee het gestelde bewezen is.

**Ladderstand**

De top 10 van de ladder zijn nu:
W. Doyer 547
L. v.d. Raadt 531
T. Kool 437
J. Hanenberg 435
H. Linders 379
H. Bakker 345
K. Verhoeven 337
W. v.d. Camp 329
K. v.d. Straaten 304
H.J. Brascamp 297

# SERVICEPAGINA

## Publicaties van de Nederlande Vereniging van Wiskundeleraren



**Zebraboekjes**
1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen
24. Gravitatie
25. Blik op Oneindig
26. Een Koele Blik op Waarheid
27. Kunst en Wiskunde
28. Voorspellen met Modellen
29. Getallenbrouwerij
30. Passen en Meten met Cirkels

Zie verder ook *www.nvvw.nl/page.php?id=7451* en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

**Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo**
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

**Honderd jaar wiskundeonderwijs, lustrumboek van de NVvW**
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW: *www.nvvw.nl/page.php?id=1779*
Voor overige NVvW-publicaties zie de website: *www.nvvw.nl/page.php?id=7450*

**Voor overige internet-adressen zie *www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php***

**Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie *www.wiskundeonderwijs.nl***

## Kalender

In de kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo vroeg mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur, het liefst via e-mail (*redactie-euclides@nvvw.nl*). Hieronder vindt u de verschijningsdata van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*.

| nr. | verwachte verschijningsdatum | deadline |
|---|---|---|
| 2 | 26 oktober 2010 | 31 aug 2010 |
| 3 | 21 december 2010 | 26 okt 2010 |
| 4 | 8 februari 2010 | 7 dec 2010 |
| 5 | 29 maart 2011 | 1 feb 2011 |
| 6 | 17 mei 2011 | 18 mrt 2011 |
| 7 | 5 juli 2011 | 11 mei 2011 |

**vrijdag 5 november, Utrecht**
Netwerkbijeenkomst Alympiade en Wiskunde B
Organisatie FIsme

**vrijdag 5 november, Utrecht**
Studiedag: Geogebra in de wiskundeles
Organisatie FIsme

**zaterdag 6 november, Nieuwegein**
**Jaarvergadering/Studiedag 2010**
**Organisatie NVvW**
Zie pag. 56 in dit nummer.

**woensdag 10 november, Zwolle**
Conferentie Doorlopende leerlijnen Taal en rekenen
Organisatie SLO

**vrijdag 12 november, Utrecht**
ELWIeR conferentie
Organisatie FIsme

**donderdag 18 november, Den Haag**
Science & Technology Summit: Meet the Future
Organisatie Platform Bèta Techniek

**vrijdag 19 november, op de scholen**
Wiskunde B-dag & Voorronde Wiskunde Alympiade
Organisatie FIsme

**vrijdag 19 november**
7e Bartjens Rekendictee
Organisatie Stichting Bartjens

**zaterdag 20 november, Leiden**
Ars et Mathesis-dag 2010
Organisatie Stichting Ars et Mathesis

**2011**

**zaterdag 8 januari, Utrecht**
Wintersymposium KWG: Logica! Als we stemmen, communiceren of liegen.
Organisatie Koninklijk Wiskundig Genootschap

**di. 25 en za. 29 januari, Utrecht**
Nationale Onderwijstentoonstelling (NOT 2011)
Organisatie VNU Exhibitions Europe

**vr. 28 en za. 29 januari, Noordwijkerhout**
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie FIsme